Nguyễn Đình Đức và Đào Như Mai

SỨC BỀN VẬT LIỆU VÀ KẾT CẤU

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

Nguyễn Đình Đức và Đào Như Mai

SỨC BỀN VẬT LIỆU VÀ KẾT CẤU

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI – 2011

Lời nói đầu

Sức bền vật liệu là môn học cơ sở quan trọng, cung cấp cho người học những kiến thức cơ bản nhất để giải các bài toán liên quan đến hệ thanh, tính toán sức bền của vật liệu và kết cấu. Chính vì vậy sức bền vật liệu và cơ học kết cấu được giảng dạy cho sinh viên tất cả các trường đại học kỹ thuật ở Việt Nam cũng như trên thế giới. Tuy nhiên, hiện nay có rất nhiều giáo trình sức bền vật liệu khác nhau, được biên soạn phục vụ phù hợp cho các đối tượng là người học trong các trường đại học khác nhau.

Giáo trình này được biên soạn cho sinh viên ngành Cơ học Kỹ thuật và ngành Công nghệ Cơ điện tử của trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội, với thời lượng giảng dạy từ 2 đến 3 tín chỉ. Giáo trình đề cập đến những nội dung căn bản nhất của môn học Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu, được biên soạn trên cơ sở các bài giảng về Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu trong khung chương trình đào tạo cho sinh viên Khoa Cơ học Kỹ thuật và Tự động hóa trong 5 năm qua, đồng thời có tham khảo kinh nghiệm và nội dung giảng dạy môn học này đã được áp dụng ở một số trường đại học kỹ thuật trong và ngoài nước, với mục đích kịp thời cung cấp cho sinh viên tài liệu phục vụ học tập.

Các tác giả chân thành cảm ơn PGS. TS. Khúc Văn Phú, PGS. TS. Trần Minh Tú, TS Vũ Đỗ Long, TS Lương Xuân Bính vì những đóng góp quý báu cả về nội dung và hình thức cho quyển sách này. Các tác giả bày tỏ sự cám ơn Trường Đại học Công nghệ, Khoa Cơ kĩ thuật và tự động hóa đã tạo điều kiện về mọi mặt để các tác giả hoàn thành quyển sách này. Quyển sách được viết ra có công không nhỏ của các em sinh viên đã góp ý cho các tác giả trong quá trình giảng dạy.

Vì giáo trình xuất bản lần đầu nên không tránh khỏi thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc, đặc biệt là của các đồng nghiệp và các em sinh viên để giáo trình ngày càng hoàn thiện tốt hơn.

Mục lục

Danh mục các kí hiệu

A diện tích tiết diện

D đường kính hình tròn hoặc đường kính ngoài của tiết diện hình vành khăn

d đường kính trong tiết diện hình vành khăn

b bề rộng của tiết diện hình chữ nhật
hoặc bề rộng cánh của tiết diện chữ I, U

h chiều cao của tiết diện hình chữ nhật hoặc của tiết diện chữ I, U

E mo đun đàn hồi Young

F ma trận độ mềm

f_{ij} hệ số ma trận độ mềm

I_z, I_y mo men quán tính đối với trục z và trục y tương ứng

I_ρ mo men quán tính li tâm đối với một trục

I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} mo men quán tính tích

i_z, i_y bán kính quán tính

K ma trận độ cứng

k_{ij} hệ số của ma trận độ cứng

M_{xo} mo men xoắn

M_z, M_y mo men uốn trong mặt phẳng yx và mặt phẳng xz tương ứng

N lực dọc trục

p véc tơ ứng suất tại một điểm

P_{th} lực tới hạn ổn định

q lực ngang phân bố

Q	lực cắt
R	phản lực
W_u, W_z, W_y	mo men quán tính chống uốn
W_{xo}	mo men quán tính chống xoắn
W	công lực ngoài
U	thế năng biến dạng
δ	biến phân
ε	biến dạng
γ	biến dạng trượt
φ	hệ số uốn dọc (hệ số giảm ứng suất)
λ	hệ số mảnh
ν	hệ số Poision
ρ	mật độ khối lượng
σ	ứng suất pháp
σ_{ch}	ứng suất chảy
σ_{tl}	ứng suất tỉ lệ
σ_b	ứng suất bền
$[\sigma]$	ứng suất pháp cho phép
τ	ứng suất tiếp
$[\tau]$	ứng suất tiếp cho phép
{ }	ngoặc kép chỉ vec tơ (ma trận có một cột)
[ ]	ngoặc vuông chỉ ma trận chữ nhật hay ma trận vuông

Đơn vị đo theo SI

Độ dài	mét	m
	mili mét	mm
Diện tích	mét vuông	m^2
	mili mét vuông = 10^{-6} m^2	mm^2
Thể tích	mét khối	m^3
	mili mét khối = 10^{-9} m^3	mm^3
Tần số	hertz = 1 vòng/giây	Hz
Khối lượng	kilogram	kg
Khối lượng riêng	kilogram trên mét khối	kg/m^3
Lực	newton = lực tác động tới vật có khối lượng 1 kg gây ra gia tốc 1 m/s^2, vậy 1N=1kg m/s^2	N
Ứng suất	newton trên mét vuông	N/m^2
	newton trên mili mét vuông	N/mm^2
Nhiệt độ	độ Celsius	^oC

Thuật ngữ cho các thừa số

10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n

NHẬP MÔN

Giới thiệu

Trong ngành xây dựng, giao thông hay chế tạo máy sử dụng các vật liệu như thép, gang, bê tông ... là các vật rắn biến dạng. Có nghĩa dưới tác động của ngoại lực các hạt vật chất bên trong vật rắn chuyển động làm cho nó biến dạng.

Khi tính toán thiết kế các cấu kiện công trình hay các chi tiết máy ta phải đảm bảo sao cho kết cấu có khả năng thực hiện các chức năng, nhiệm vụ của mình và không bị phá hủy trong suốt thời gian tồn tại. Đây chính là lí do vì sao môn học sức bền vật liệu và cơ học kết cấu là môn cơ sở trong các chương trình đạo tạo kĩ sư các ngành kĩ thuật.

Quyển sách này trình bày các nội dung cơ bản nhất của môn học sức bền vật liệu và kết cấu, thực chất gồm hai phần cơ bản

- Phần *Sức bền vật liệu* nghiên cứu các phương pháp, các nguyên tắc chung để đánh giá khả năng chịu tải (tác động cơ học) của các cấu kiện công trình, các chi tiết máy. Sức bền vật liệu là môn khoa học thực nghiệm xây dựng trên một số kết quả thực nghiệm, các giả thiết cho phép đơn giản hóa nhưng giữ những mô tả bản chất. Trên cơ sở thực nghiệm, đưa ra nhưng chỉ tiêu để đánh giá độ bền, độ cứng và độ ổn định của các chi tiết nói riêng và cả kết cấu nói chung.
- Phần *Cơ học kết cấu* trình bày các phương pháp cơ bản phân tích kết cấu dạng khung dàn một cách tổng thể.

Mục đích của môn học

Tính toán và thiết kế các cấu kiện công trình, chi tiết máy sao cho đủ độ bền, đủ độ cứng và đủ độ ổn định. Thế nào là đủ độ bền, đủ độ cứng và ổn định?

– Đủ độ bền: kết cấu có khả năng chịu được tất cả các tổ hợp lực đặt lên công trình trong thời gian tồn tại (tuổi thọ) – Giàn khoan ngoài khơi không sụp đổ khi có gió bão ở cấp quy định theo tiêu chuẩn, quy phạm thiết kế.

– Đủ độ cứng: dưới tác động của lực những thay đổi kích thước hình học của kết cấu không được vượt quá giới hạn cho phép. Ví dụ trong các quy phạm, tiêu chuẩn thiết kế có quy định về độ võng ở giữa dầm không vượt quá giá trị quy định, hay chuyển vị ngang của các công trình như tháp nước, cột điện không được vượt quá giá trị cho trước.

– Đủ ổn định: khả năng đảm bảo trạng thái cân bằng ban đầu, không mất đi hình dáng ban đầu.

Từ đây ta có ba bài toán cơ bản

– Bài toán kiểm tra độ bền, độ cứng và độ ổn định của các chi tiết và các cấu kiện.

– Bài toán thiết kế có nhiệm vụ lựa chọn hình dạng và kích thước tiết diện phù hợp cho từng chi tiết và cấu kiện của kết cấu

– Bài toán xác định tải trọng cho phép đặt lên kết cấu

Đối tượng của môn học:

Đối tượng nghiên cứu của sức bền vật liệu là các chi tiết công trình. Theo kích thước hình học các chi tiết này có thể phân làm ba loại

– Thanh là các chi tiết có kích thước theo hai phương (mặt cắt ngang) bé hơn rất nhiều so với kích thước còn lại (chiều dài) - Bài toán một chiều

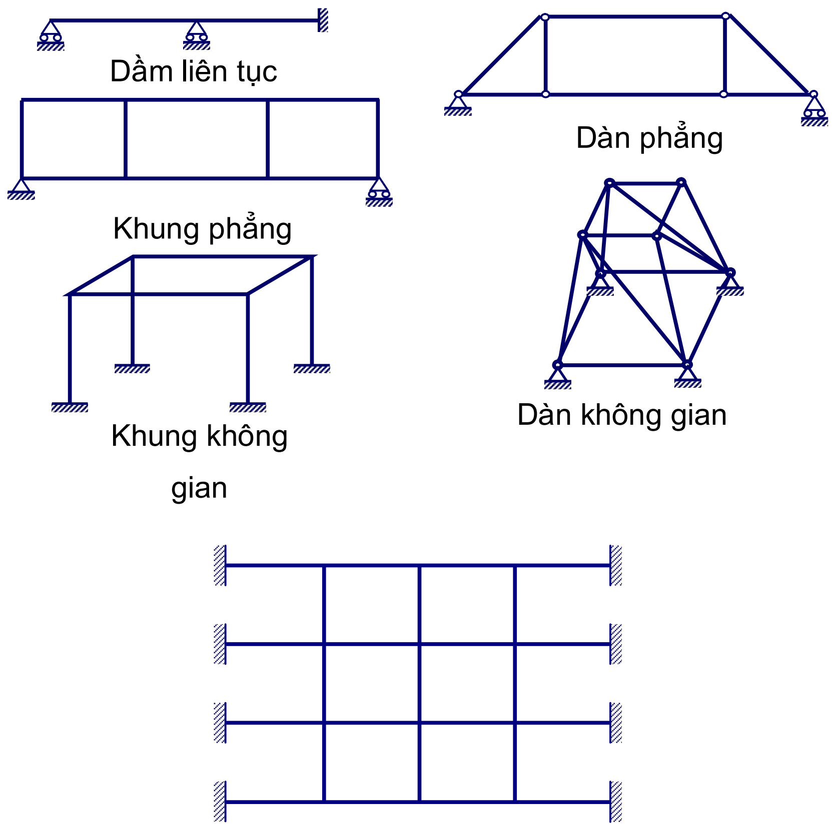
– Tấm và vỏ là các chi tiết có kích thước theo một phương (độ dày) bé hơn rất nhiều so với hai kích thước còn lại như tấm sàn, tấm tường vỏ bình chứa xăng, bể chứa dầu, mái vòm - Bài toán hai chiều

– Khối là các chi tiết có các kích thước theo ba phương tương đương nhau, ví dụ như móng máy, nền đất, viên bi – Bài toán ba chiều

Thanh thường gặp phổ biến hơn cả trong công trình, chính vì vậy thanh là đối tượng nghiên cứu chính của Sức bền vật liệu.

Định nghĩa về thanh. Thanh là vật thể hình học được tạo bởi một hình phẳng $\mathcal{A}$ có trọng tâm chuyển động dọc theo đường tựa ζ, trong quá trình chuyển động hình phẳng luôn vuông góc với tiếp tuyến của đường tựa. Hình phẳng $\mathcal{A}$ được gọi là mặt cắt ngang hay tiết diện của thanh, đường tựa ζ được gọi là trục thanh

Đối tượng nghiên cứu trong Cơ học kết cấu là hệ thanh. Hệ thanh là các kết cấu hợp thành từ các phần tử có kích thước đủ dài khi so sánh với mặt cắt ngang. Đó là dầm, dàn phẳng, dàn không gian, khung phẳng, lưới ngang và khung không gian như trên hình 1.



Hình 1. Các dạng kết cấu

Dàn là hệ thanh liên kết khớp với nhau. Nội lực trong các thanh chỉ có lực dọc trục. Nếu hệ thanh chỉ gồm các thanh nằm trong một mặt phẳng ta gọi là dàn phẳng.

Khung là hệ thanh liên kết cứng với nhau. Nội lực trong từng mặt cắt của thanh gồm có lực dọc trục, hai lực cắt, hai mô men uốn và mô men xoắn. Nếu hệ khung chỉ gồm các thanh nằm trong một trong mặt phẳng ta gọi là khung phẳng. Khi đó nội lực trong từng mặt cắt chỉ còn lực dọc trục, lực cắt và mô men uốn.

Lưới ngang là một hệ thanh nằm trong một mặt phẳng, nhưng chỉ chịu lực tác dụng vuông góc với mặt phẳng đó. Do vậy nội lực trong từng thanh chỉ còn lực cắt, mô men uốn và mômentxoắn.

Các giả thiết quan trọng

– Chuyển vị và góc xoay của kết cấu thay đổi tuyến tính đối với lực tác dụng có nghĩa chúng tỉ lệ với lực tác dụng

– Biến dạng nhỏ có nghĩa các biến dạng không làm thay đổi hình học của kết cấu do vậy không thay đổi lực tác dụng lên kết cấu

– Từ hai giả thiết trên ta có nguyên lí cộng tác dụng: Dưới tác động của tổ hợp lực ta có thể cộng dồn ứng suất, biến dạng và chuyển vị gây ra bởi từng lực riêng biệt

– Vật liệu được giả thiết là liên tục đồng nhất và đẳng hướng.

  + Tính liên tục đảm bảo hai điểm vật chất cạnh nhau sau biến dạng vẫn ở cạnh nhau.

  + Tính đồng nhất nói lên cơ tính của mọi điểm như nhau.

  + Đẳng hướng có nghĩa các tính chất của vật liệu không phụ thuộc vào hướng.

– Vật liệu có tính đàn hồi, tuân thủ định luật Hooke. Có nghĩa ta chỉ xét các bài toán khi vật liệu làm việc trong miền đàn hồi

Khái niệm siêu tĩnh

Hệ là siêu tĩnh khi các lực cần tìm của hệ không thể tính được chỉ từ phương trình cân bằng mà còn cần đến các điều kiện hình học.

Phân tích hệ siêu tĩnh dẫn đến giải hệ phương trình tuyến tính với số ẩn phụ thuộc vào phương pháp mà ta lựa chọn. Khi tính toán bằng máy tính bấm tay ta có thể sử dụng các thuật toán lặp hay chỉnh dần để làm giảm số phép tính.

Đối với hệ lớn và phức tạp ta sử dụng máy tính sử dụng các chương trình phân tích kết cấu dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Tuy vậy các phương pháp tính bằng tay không thể bỏ qua.

Các nguyên lí cơ bản

Nguyên lí Saint-Venant được phát biểu như sau "...tại những miền đủ xa điểm đặt lực sự khác biệt giữa hiệu ứng của hai lực khác nhau nhưng tương đương về mặt tĩnh học sẽ rất nhỏ..."

Nguyên lí Saint Venant cho phép thay các phân bố ứng suất phức tạp trên biên bằng phân bố đơn giản hơn, khi về mặt hình học biên đủ ngắn. Nói khác đi sự phân bố ứng suất và biến dạng của vật thể tại những miền xa nơi đặt lực sẽ không thay đổi nếu thay hệ lực đã cho bằng một hệ lực khác tương đương.

Có thể hiểu rằng nếu trên một phần nào đó của vật có tác động của một hệ lực cân bằng thì ứng suất phát sinh sẽ tắt dần rất nhanh ở những điểm xa miền đặt lực. Tại những điểm của vật thể xa điểm đặt lực thì ứng suất phụ thuộc rất ít vào cách tác dụng của lực

Nguyên lí cộng tác dụng được phát biểu Một đại lượng do nhiều nguyên nhân gây ra sẽ bằng tổng đại lượng đó do từng nguyên nhân gây ra riêng rẽ

Do vậy các đại lượng như nội lực, biến dạng, chuyển vị của vật thể do một hệ ngoại lực gây ra bằng tổng các kết quả tương ứng do từng thành phần ngoại lực gây ra riêng rẽ

Hệ tiên đề cơ bản của tĩnh học

– *Tiên đề về sự cân bằng của vật rắn*. Điều kiện cần và đủ để một vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hai lực là hai lực này có cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều nhau - tiêu chuẩn cân bằng của vật tự do dưới tác dụng của hệ lực đơn giản nhất

– *Tiên đề thêm hoặc bớt một cặp lực cân bằng.* Tác dụng của một hệ lực không thay đổi nếu ta thêm (bớt) đi hai lực cân bằng. Tiên đề này cho ta quy định về một phép biến đổi tương đương cơ bản về lực

  Hệ quả (Định lí trượt lực). Tác dụng của lực không thay đổi khi ta trượt lực trên đường tác dụng của nó

– *Tiên đề hình bình hành lực.* Hai lực tác dụng tại một điểm tương đương với một lực tác dụng tại cùng điểm đó và có véc tơ lực bằng véc tơ chéo của hình bình hành có hai cạnh là hai véc tơ lực của các lực đã cho

– *Tiên đề tác dụng và phản tác dụng.* Lực tác dụng và lực phản tác dụng giữa hai vật có cùng cường độ, cùng đường tác dụng và hướng ngược chiều nhau.

– *Tiên đề hoá rắn.* Một vật rắn biến dạng đã cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực thì khi hoá rắn nó vẫn ở trạng thái cân bằng

– *Tiên đề thay thế liên kết.* Vật không tự do cân bằng có thể được xem là vật tự do cân bằng bằng cách giải phóng tất cả các liên kết và thay thế tác dụng các liên kết được giải phóng bằng các phản lực thích hợp.

Nội dung

Nội dung quyển sách sẽ gồm ba phần là: nhập môn, các bài toán thanh và cơ học kết cấu. Cuối cùng sẽ là các phụ lục, cụ thể sẽ gồm các chương như sau

– Nhập môn
  + Chương 1. Các khái niệm cơ bản
  + Chương 2. Quan hệ ứng suất và biến dạng
  + Chương 3. Các lí thuyết bền
– Phần 1. Các bài toán thanh
  + Chương 4 Các đặc trưng hình học của hình phẳng
  + Chương 5 Thanh thẳng chịu kéo nén đúng tâm
  + Chương 6 Thanh thẳng chịu xoắn
  + Chương 7 Thanh thẳng chịu uốn

  + Chương 8 Thanh chịu lực phức tạp
  + Chương 9 Ổn định của thanh thẳng
- Phần 2. Cơ học kết cấu
  + Chương 10. Hệ siêu tính
  + Chương 11. Phương pháp lực
  + Chương 12. Phương pháp chuyển vị
  + Chương 13. Phương pháp công ảo
  + Chương 14. Phương pháp phần tử hữu hạn – sơ lược
- Các phụ lục

Ở phần 1 sau các chương không có bài tập, vì sách bài tập sức bền vật liệu rất phong phú nên để dành sự lựa chọn cho giảng viên. Tuy nhiên nội dung phần hai chủ yếu giới thiệu các phương pháp cơ bản nhất của cơ học kết cấu, do vậy sau các chương trình bày các bài tập có chọn lựa để tiện cho giảng viên.

CHƯƠNG 1
Các khái niệm cơ bản

1.1 Lực tác dụng

Ngoại lực

Định nghĩa. Ngoại lực là những lực tác động của môi trường bên ngoài (sóng, gió) hay của những vật thể khác tác động lên vật thể đang xét (lực bánh xe tác động lên đường ray, búa đập).

Ngoại lực gồm

- tải trọng tác động là lực chủ động
- và phản lực liên kết là lực thụ động phát sinh tại các liên kết do có tác dụng của tải trọng

Tải trọng có thể phân loại theo cách thức tác dụng làm hai loại

- lực tập trung là lực hay mô men tác động vào một điểm
- và lực phân bố là lực trải trên một thể tích, một diện tích hay một đường.

Tải trọng cũng có thể phân loại thành

- tải trọng tĩnh (được coi là tĩnh khi nó tăng rất chậm từ không đến giá trị nào đó rồi giữ nguyên giá trị đó), khi đó có thể bỏ qua lực quán tính trong quá trình tăng lực
- và tải trọng động thay đổi theo thời gian khi đó không thể bỏ qua thành phần quán tính.

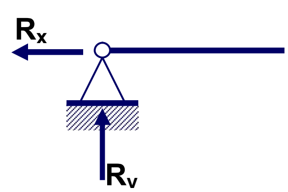
Liên kết và phản lực liên kết

Vật thể chịu tác động của tải trọng sẽ truyền tác động sang các chi tiết tiếp xúc với chúng. Ngược lại các chi tiết sẽ tác động lên vật thể đang xét những phản lực. Vật thể chịu liên kết làm cho chuyển động bị ngăn cản. Khi đó sẽ xuất hiện các phản lực, chúng có phương ứng với phương của chuyển động bị ngăn cản

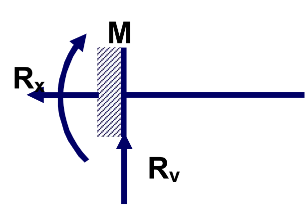
Trường hợp trong mặt phẳng

- Gối tựa di động (liên kết đơn) - chỉ ngăn cản chuyển động thẳng dọc theo liên kết. Phản lực là một lực R. Trên hình 1.1a là hai cách biểu diễn liên kết gối di động
- Gối tựa cố định (liên kết khớp) – ngăn cản mọi chuyển động thẳng. Phản lực phân ra hai thành phần R_x và R_y theo phương ngang và phương đứng tương ứng
- Liên kết ngàm: ngăn cản mọi chuyển động (cả quay và thẳng). Phản lực gồm một lực R chia làm hai thành phần R_x và R_y và một mô men chống quay

a. Gối tựa di động hay liên kết đơn



b. Gối tựa cố định hay liên kết khớp



c. Liên kết ngàm

Hình 1.1. Biểu diễn các liên kết thường gặp trong trường hợp phẳng

Trong phụ lục 8 cho bảng các phản lực liên kết thường gặp.

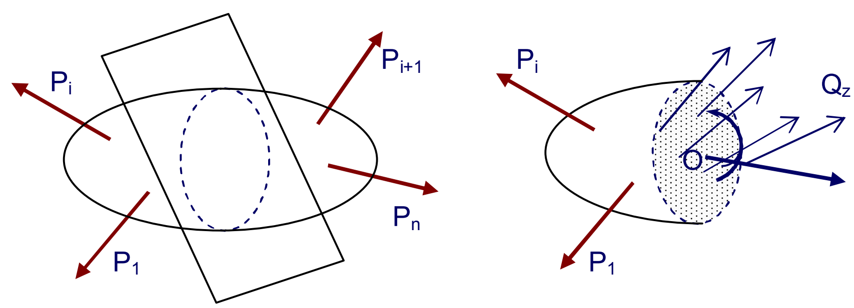
1.2 Nội lực

Giữa các phần tử vật chất luôn có những tương tác. Tại thời điểm ban đầu lực tương tác đảm bảo sự không thay đổi hình dạng của vật thể. Dưới tác động của ngoại lực vật biến dạng kéo theo sự thay đổi lực tương tác bên trong vật thể.

Công nhận giả thiết vật thể ở trạng thái tự nhiên có nghĩa là ở trạng thái cân bằng ban đầu khi chưa có tác động bên ngoài, nội lực trong hệ bằng không. Ta có định nghĩa nội lực là các lực tương tác giữa các phần tử vật chất của vật thể xuất hiện khi vật rắn bị biến dạng dưới tác động của ngoại lực.

Phương pháp mặt cắt

Để xem xét, biểu diễn và xác định nội lực ta dùng phương pháp mặt cắt. Xét vật thể cân bằng dưới tác động của một hệ lực, tưởng tượng mặt S chia vật thể làm hai phần A và B (hình 1.2a). Xét sự cân bằng của một phần ví dụ phần A. Ngoài ngoại lực đặt vào A ta phải đặt hệ lực tương tác của phần B đặt trên mặt cắt S, hệ lực tương tác này chính là nội lực trên mặt cắt đang xét.



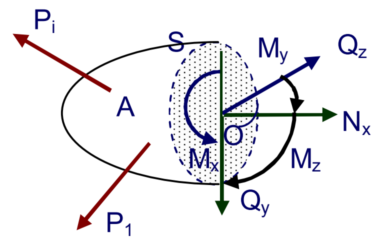
Hình 1.2. Phương pháp mặt cắt

Nội lực tại mặt cắt ngang

Hệ lực tương tác này có thể thu gọn về trọng tâm O của mặt cắt ngang S được vec tơ chính R và mô men ngẫu lực chính M. Vec tơ lực R và mô men ngẫu lực M nói chung có phương chiều bất kì trong không gian. Chọn hệ trục tọa độ vuông góc với trục x vuông góc với mặt cặt ngang S, trục y và z nằm trên mặt phẳng chứa S. Chiếu vec tơ lực R và mô men ngẫu lực M lên hệ trục tọa độ đã chọn ta được các thành phần nội lực tại mặt cắt ngang (hình 1.3)

– N_x là thành phần trên trục x, được gọi là lực dọc trục

- Q_y, Q_z là các thành phần trên trục y và z được gọi là lực cắt
- M_x là thành phần mô men quay quanh trục x, gọi là mô men xoắn
- M_y, M_z là hai thành phần mô men quay quanh trục y và trục z (tác dụng trong mặt phẳng Oxz và Oxy), gọi là các mô men uốn



Hình 1.3. Nội lực tại mặt cắt ngang

N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y và M_z là sáu thành phần nội lực tại mặt cắt ngang, được xác định từ điều kiện cân bằng của phần đang xét dưới dạng sáu phương trình cân bằng sau đây

$$N_X + \sum_i P_{ix} = 0;\ Q_y + \sum_i P_{iy} = 0;\ Q_z + \sum_i P_{iz} = 0$$

$$M_X + \sum_i m_X(\vec{P}_i) = 0;\ M_y + \sum_i m_Y(\vec{P}_i) = 0;\ M_Z + \sum_i m_Z(\vec{P}_i) = 0$$

Nếu ta xét phần B cũng sẽ thu được sáu thành phần nội lực có cũng trị số nhưng ngược chiều với nội lực tương ứng của phần A

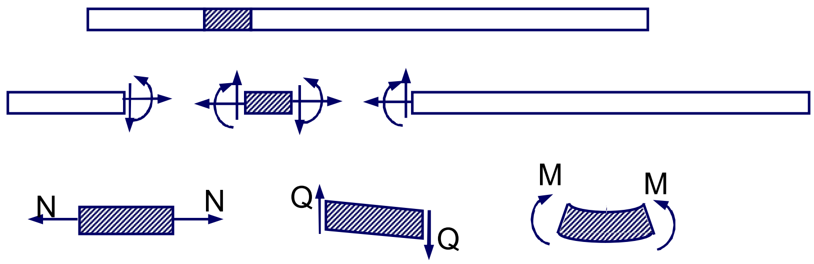
Nội lực tại mặt cắt ngang của thanh trong bài toán phẳng

Thanh được đặc trưng bằng tiết diện (mặt cắt ngang) và trục. Ta xét thanh cân bằng trong mặt phẳng chứa trục và ngoại lực nằm trong mặt phẳng xz

Áp dụng phương pháp mặt cắt, khi đó nội lực tại tiết diện thanh sẽ có 3 thành phần với quy ước dấu biểu diễn trên hình 1.4.

- Lực dọc trục N vuông góc với tiết diện, là dương khi đoạn ta xét chịu kéo
- Lực cắt Q vuông góc với tiếp tuyến của trục thanh, là dương khi đoạn ta xét có xu hướng quay theo chiều kim đồng hồ dưới tác động của lực cắt

– Mô men uốn M gây uốn trong mặt phẳng xz. là dương khi đoạn ta xét bị cong võng xuống (hứng nước) dưới tác động của mô men



Hình 1.4. Quy ước dấu của nội lực trong thanh

Biểu đồ nội lực

Biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của nội lực trên các tiết diện dọc theo trục thanh. Từ đó ta tìm được tiết diện nào có nội lực lớn để bố trí vật liệu thích hợp. Để vẽ biểu đồ ta cho mặt cắt biến thiên dọc trục x, viết biểu thức giải tích của các nội lực, vẽ đồ thị các hàm số này theo biến x

Ví dụ 1.1. Biểu đồ lực dọc N, lực cắt Q và mô men uốn M cho ví dụ trên hình 1.5a vẽ trên hình 1.5 b,c,d.

Bước đầu tiên ta xác định phản lực từ điều kiện cân bằng cho hệ lực phẳng bằng các phương trình

$$
\begin{aligned}
&P - R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = P;\\
&3bR_3 - 2bP_1 - 4bP_3 = 0 \Rightarrow R_3 = 10P/3\\
&R_1 + R_3 = P_1 + P_2 = 4P \Rightarrow R_1 = 2P/3
\end{aligned}
$$

ta được các phản lực $R_1 = 2P/3$, $R_2 = P$, $R_3 = 10P/3$.

Thay liên kết bằng phản lực. Xét mặt cắt 1-1 trong đoạn từ bên trái đến điểm đặt lực P_1 và P_2. Đặt các nội lực N, Q, M vào mặt cắt cách đầu trái một đoạn *x* và xét cân bằng của đoạn này

$$
\begin{aligned}
&N - R_2 = 0\\
&Q + R_1 = 0\\
&M - R_1 x = 0
\end{aligned}
$$

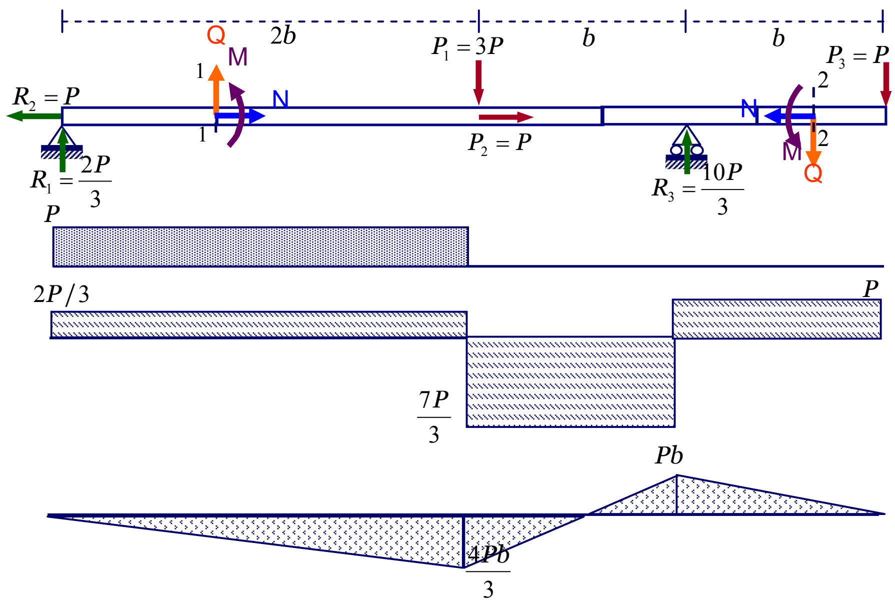
ta nhận được $N = P$, $Q = 2P/3$, $M = 2Px/3$

Tương tự ta xét mặt cắt 2-2 trong đoạn từ bên phải đến điểm có gối di động. Đặt các nội lực N, Q, M vào mặt cắt cách đầu phải một đoạn *x* và xét cân bằng của đoạn này

$$N = 0$$
$$Q - P = 0$$
$$M - Px = 0$$

ta nhận được $N = 0$, $Q = P$, $M = Px$

Đoạn ở giữa áp dùng trình tự tương tự ta được biểu đồ lực dọc trục, lực cắt và mô men trên các hình (1.5b., c. d.)



Hình 1.5. Biểu đồ nội lực của dầm: a. Dầm chịu lực; b. Biểu đồ lực dọc N; c. Biểu đồ lực cắt Q; d. Biểu đồ mô men M

Ví dụ 1.2. Vẽ biểu đồ nội lực của hệ khung trên hình 1.6a.

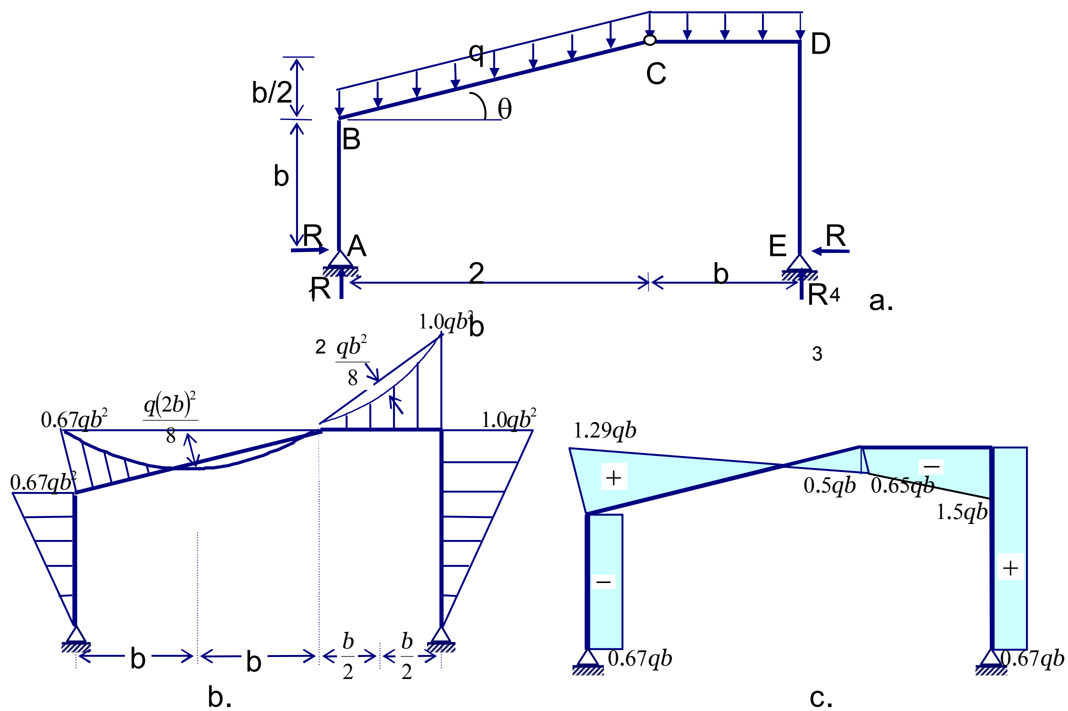
Bước đầu tiên ta tìm phản lực tại gối đỡ từ 3 phương trình cân bằng và một phương trình mô men bằng không tại khớp nối, ta được

$$R_1 = R_4 = \frac{2qb}{3}, \quad R_2 = R_3 = \frac{3qb}{2} \tag{1.9}$$

Lực cắt trên đoạn AB bằng phản lực R_1. Tại mặt cắt bên phải điểm B và bên trái điểm C tính theo công thức dưới đây

$$Q_{Br} = R_1 \cos\theta - R_2 \sin\theta$$
$$Q_{Cl} = (R_1 - 2qb)\cos\theta - R_2 \sin\theta \qquad (1.10)$$

Biểu đồ mô men trên đoạn AB và đoạn DE là đường bậc một, còn trên hai đoạn BC và CD chịu lực phân bố biểu đồ mô men là đường bậc hai.

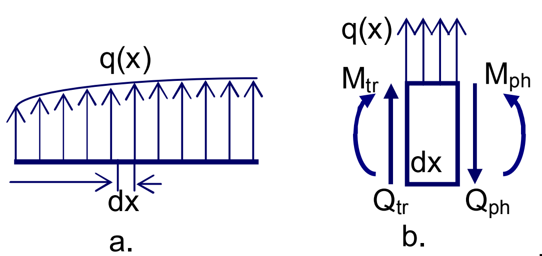


Hình 1.6. Biểu đồ nội lực cho hệ khung: a. Hệ khung phẳng;

b. Biểu đồ mô men M; c. Biểu đồ lực cắt Q

1.3 Quan hệ vi phân giữa nội lực và tải trọng

Xét trường hợp thanh chịu uốn dưới tác dụng của tải phân bố q(x) như trên hình 1.7a



Hình 1.7. Phân tố của thanh chịu tải phân bố

Xét một đoạn phân tố dx, kí hiệu Q, M là lực cắt và mô men uốn của mặt cắt bên trái, và Q+dQ và M+dM là lực cắt và mô men uốn của mặt cắt bên phải (hình 1.7b) viết phương trình cân bằng cho một đoạn phân tố đó

$$\sum Y = 0 \;\rightarrow Q + qdx - (Q + dQ) = 0 \;\rightarrow \frac{dQ}{dx} = q \qquad (1.11)$$

$$\sum M = 0 \;\rightarrow M + Qdx + q\frac{dx^2}{2} - (M + dM) = 0$$

$$\rightarrow \frac{dM}{dx} = Q\,,\; \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q \qquad (1.12)$$

Ta có nhận xét

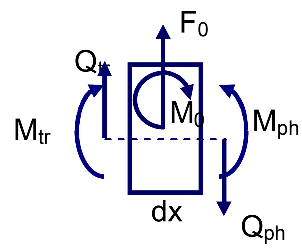
- Đạo hàm bậc nhất theo trục x của mô men uốn bằng lực cắt.
- Đạo hàm bậc hai theo trục x của mô men uốn bằng đạo hàm bậc nhất theo trục x của lực cắt và bằng cường độ lực phân bố

Quan hê bước nhảy của biểu đồ nội lực và các tải trọng tập trung.

Cho thanh chịu lực ngang tập trung F_0, mô men tập trung M_0. Xét phân tố dx chứa điểm có đặt tải tập trung (hình 1.8), viết phương trình cân bằng cho đoạn phân tố đó

$$\sum Y = 0 \;\rightarrow \Delta Q = Q_{ph} - Q_{tr} = F_0$$

$$\sum M = 0 \;\rightarrow \Delta M = M_{ph} - M_{tr} = M_0 \qquad (1.13)$$



Hình 1.8. Phân tố thanh có đặt tải tập trung

Ta có các nhận xét sau

- Tại tiết diện đặt lực tập trung sẽ có bước nhảy.

– Trị số của bước nhảy bằng trị số của các lực tập trung.

– Bước nhảy của lực cắt dương khi lực hướng lên.

– Bước nhảy của mô men dương khi mô men quay theo chiều kim đồng hồ

Bằng cách làm tương tự ta có các quan hệ giữa nội lực và tải trọng phân bố trong trường hợp thanh chịu kéo dưới tác dụng của tải trọng phân bố dọc thanh p(x) và trường hợp thanh chịu xoắn dưới các dụng của mô men xoăn phân bố $m_{xo}(x)$

– Đạo hàm của lực dọc bằng cường độ tải trọng phân bố dọc

$$\frac{dN}{dx} = -p(x)$$

– Đạo hàm của mô men xoắn bằng cường độ mô men xoắn phân bố

$$\frac{dM_{xo}}{dx} = m_{xo}(x)$$

Quan hệ bước nhảy của biểu đồ với tải trọng dọc trục tập trung P_0 và mô men xoắn tập trung M_{xo0}

$$\Delta N = N_{ph} - N_{tr} = P_0$$

$$\Delta M_{xo} = M_{xo,ph} - M_{xo,tr} = M_{xo0}$$

Kết luận của chương 1

Chương 1 trình bày các khái niệm chung như

– Lực tác dụng đưa ra khái niệm ngoại lực, phân biệt lực tác động và phản lực liên kết, phân loại lực tập trung và lực phân bố, định nghĩa tải trọng tĩnh và tải trọng động

– Nội lực đưa ra định nghĩa nội lực, khái niệm nội lực tại mặt cắt ngang, trình bày phương pháp mặt cắt xác định nội lực, quy ước dấu của nội lực tại mặt cắt của thanh và cách biểu diễn nội lực bằng biểu đồ.

- Quan hệ vi phân giữa nội lực và tải trọng. Trình bày các quan vệ vi phân giữa tải trọng phân bố và nội lực cũng như bước nhảy trong biểu đồ nội lực khi có lực tập trung tác động

CHƯƠNG 2
Quan hệ ứng suất và biến dạng

2.1 Trạng thái ứng suất

2.1.1 Vec tơ ứng suất

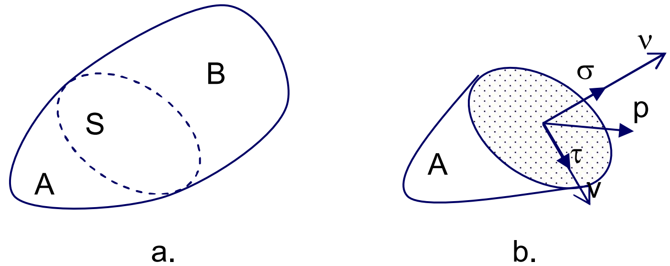
Dùng phương pháp tiết diện để nghiên cứu trạng thái ứng suất của vật thể biến dạng (Hình 2.1a). Xét phân tố diện tích ΔS chứa điểm M có pháp tuyến ν ở bên trong vật thể. Giả thiết nội lực tác dụng lên diện tích ΔS đưa về lực tương đương Δp tại M và ngẫu lực ΔM. Khi ΔS tiến tới 0 (vẫn chứa M) thì Δp tiến tới dp/dS còn $\Delta M / \Delta S$ tiến tới không. Đại lượng

$$\vec{p}_{\nu} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta S} = \frac{d\vec{p}}{dS} \qquad (2.1)$$

là vectơ ứng suất đối với phần tử tiết diện qua điểm M có pháp tuyến $\vec{\nu}$. Vectơ ứng suất biểu thị nội lực tác dụng lên một đơn vị diện tích tiết diện đi qua một điểm nào đấy của vật thể biến dạng.

Vec tơ ứng suất có thể chiếu lên phương pháp tuyến và tiếp tuyến với mặt cắt (hình 2.1.b) khi đó ta có biểu diễn

$$\vec{p}_{\nu} = \vec{\sigma}_{u} + \vec{\sigma}_{v} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} \qquad (2.2)$$



Hình 2.1. Vec tơ ứng suất

Thứ nguyên của ứng suất là lực/chiều dài^2, đơn vị thường dùng N/m^2 (Pa – Pascal), MN/m^2 (MPa – Mega Pascal).

– Thành phần theo phương pháp tuyến, kí hiệu là σ, được gọi là ứng suất pháp

– Thành phần theo phương tiếp tuyến, kí hiệu là τ, được gọi là ứng suất tiếp

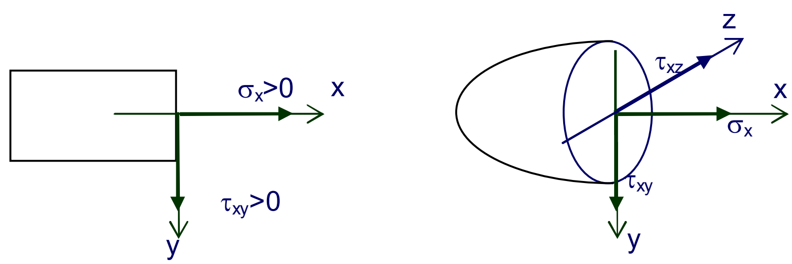
Khi đó, ứng suất p

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

Quy ước dấu của ứng suất như sau (hình 2.2)

– Ứng suất pháp được gọi là dương khi chiều của nó cùng chiều dương của pháp tuyến ngoài mặt cắt. Ứng suất pháp được kí hiệu cùng với một (hoặc 2) chỉ số ví dụ σ_x (hoặc σ_{xx}) chỉ chiều của pháp tuyến

– Ứng suất tiếp được gọi là dương khi pháp tuyến ngoài của mặt cắt quay 90^o theo chiều kim đồng hồ sẽ trùng với chiều ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp được kí hiệu cùng với hai chỉ số ví dụ τ_{xy}, τ_{xz} chỉ số thứ nhất chỉ chiều của pháp tuyến, chỉ số thứ hai chỉ chiều song song với ứng suất tiếp



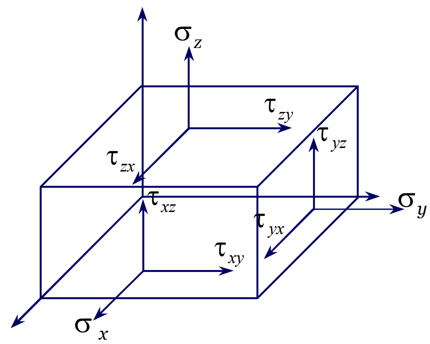
Hình 2.2. Quy ước dấu và chỉ số của các thành phần ứng suất

2.1.2 Tenxơ ứng suất

Để xét trạng thái ứng suất tại một điểm, ta xét một phân tố đủ nhỏ tại điểm đó ta chiếu p_ν lên hệ tọa độ đề các vuông góc. Khi đó hình chiếu của lên p_ν các trục tọa độ X_ν, Y_ν, Z_ν có thể biểu diễn qua vec tơ pháp tuyến $\nu(l,m,n)$ bằng sáu thành phần σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} và τ_{xz} (hình 2.3)

$$\begin{aligned} X_\nu &= \sigma_{xx} l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y_\nu &= \tau_{xy} l + \sigma_{yy} m + \tau_{yz} n \\ Z_\nu &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_{zz} n \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Sáu thành phần này khái quát hóa tình trạng chịu lực của một điểm, là tập hợp tất cả những ứng suất trên mọi mặt cắt đi qua nó đó chính là trạng thái ứng suất tại một điểm, (hình 2.3)



Hình 2.3. Thành phần ứng suất tại phân tố

Sáu thành phần ứng suất (ba ứng suất pháp và ba ứng suất tiếp) này xác định trong hệ tọa độ lựa chọn. Theo định nghĩa chúng chính là các thành phần của một ten xơ bậc hai đối xứng gọi là ten xơ ứng suất. Ta có thể nói trạng thái ứng suất được biểu diễn bằng ten xơ ứng suất bậc hai đối xứng, được kí hiệu theo các cách sau đây

$$\sigma_{ij} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Theo định nghĩa về ten xơ, ta có thể lựa chọn hệ tọa độ sao cho các thành phần ứng suất tiếp bằng không. Hệ tọa độ này xác định hướng chính của ứng suất, hướng chính tìm từ hệ phương trình

$$\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{(\alpha)}\right)\nu_i = 0\,. \tag{2.5}$$

Viết dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{(\alpha)} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{(\alpha)} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{(\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = 0\,, \text{ trong đó } \{\nu\} = \begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}. \tag{2.5a}$$

Nói cách khác tại điểm bất kì ta có thể tìm được ba mặt vuông góc là các mặt chính, có pháp tuyến là các hướng chính.

Ứng suất pháp trên các mặt chính là ứng suất chính, kí hiệu là σ_1, σ_2, σ_3 và được quy ước $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ theo các giá trị đại số. Ứng suất chính được xác định từ phương trình

$$\mathrm{Det}\left|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{(\alpha)}\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^3_{(\alpha)} - J_1\sigma^2_{(\alpha)} + J_2\sigma_{(\alpha)} - J_3 = 0 \tag{2.6}$$

trong đó J_1, J_2, J_3 là các bất biến của ten xơ ứng suất bậc hai có dạng

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_{tb},$$

$$J_2 = \left\{\begin{vmatrix}\sigma_y & \sigma_{yz}\\ \sigma_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\sigma_z & \sigma_{zx}\\ \sigma_{zx} & \sigma_x\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\sigma_x & \sigma_{xy}\\ \sigma_{xy} & \sigma_y\end{vmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right) = \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4\right),$$

$$J_3 = \begin{vmatrix}\sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix} = Det\left|\sigma_{ij}\right| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \tag{2.7}$$

Ở mặt phẳng tạo với các hướng chính một góc 45^0 ta có trạng thái ứng suất mà các ứng suất tiếp đạt cực trị. Chúng có giá trị tính qua các ứng suất chính như sau

$$\tau_1 = \pm\left|\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right|, \quad \tau_2 = \pm\left|\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right|, \quad \tau_3 = \pm\left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|. \tag{2.8}$$

2.1.3 Phân loại trạng thái ứng suất

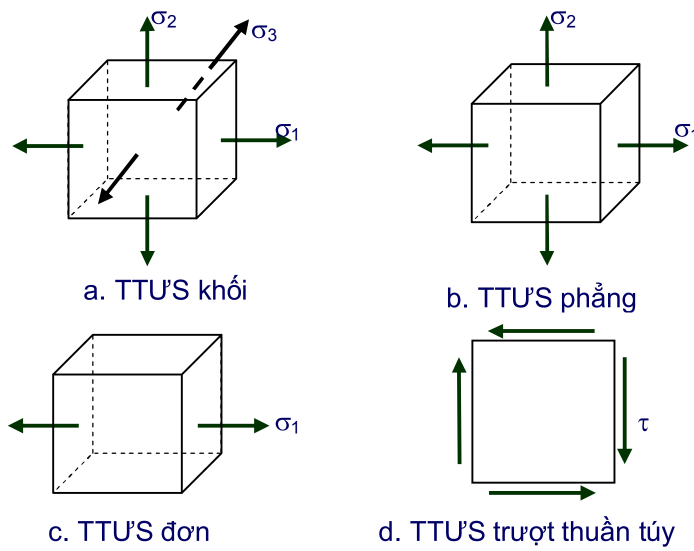
Phân loại trạng thái ứng suất dựa trên các trường hợp khác nhau của ứng suất chính

- Trạng thái ứng suất khối khi cả ba ứng suất chính khác không, trên cả ba mặt chính đều có ứng suất pháp $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 \neq 0$ (hình 2.4a).
- Trạng thái ứng suất phẳng khi hai trong ba ứng suất chính khác không, trên một mặt chính có ứng suất pháp bằng không, hai mặt còn lại ứng suất pháp khác không $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 = 0$ (hình 2.4b).

– Trạng thái ứng suất đơn khi một trong ba ứng suất chính khác không, trên hai mặt chính có ứng suất pháp bằng không, mặt còn lại ứng suất pháp khác không $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ (hình 2.4c).

– Trạng thái ứng suất trượt thuần túy là trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt khi tìm được hai mặt vuông góc trên hai mặt đó chỉ có ứng suất tiếp, không có ứng suất pháp (hình 2.4d)

Khi xem xét các bài toán thanh ta sẽ gặp chủ yếu là trạng thái ứng suất phẳng, nên ta xem xét kĩ hơn trạng thái ứng suất này



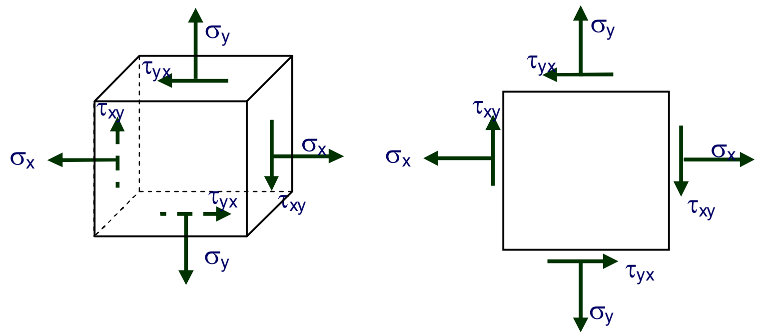
Hình 2.4. Các trạng thái ứng suất (TTƯS)

2.1.4 Trạng thái ứng suất phẳng

Trạng thái ứng suất phẳng như đã định nghĩa là trạng thái đảm bảo điều kiện ứng suất pháp tại mặt vuông góc với trục z bằng không,

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \qquad (2.9)$$

Ứng suất trên các mặt vuông góc với trục x và trục y gồm có $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ và τ_{yx}. Ten xơ ứng suất là ten xơ đối xứng nên $\tau_{xy} = \tau_{yx}$



Hình 2.5. Trạng thái ứng suất phẳng.

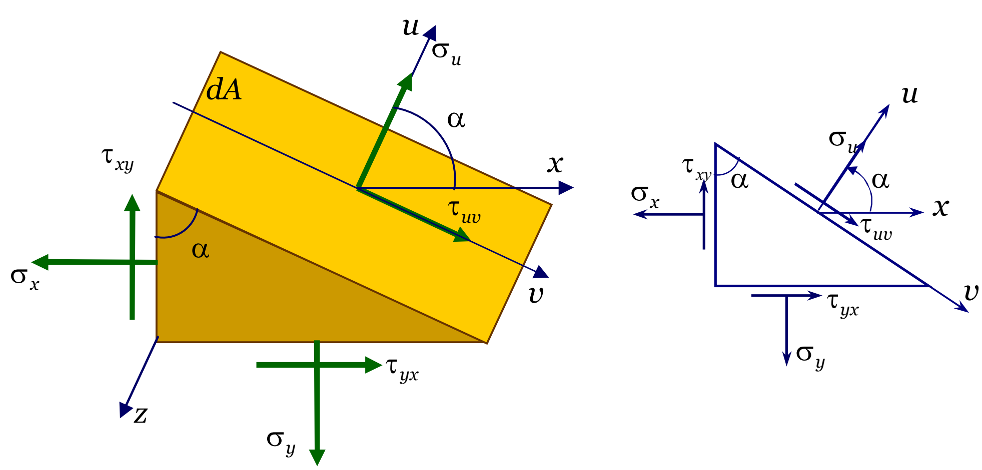
Xét cân bằng của phần phân tố bị cắt bằng mặt cắt nghiêng một góc α. Kí hiệu u, v là pháp tuyến và tiếp tuyến với mặt nghiêng. Sử dụng quy ước dấu của ứng suất và hình chiếu của diện tích dA lên trục x và trục y

$$dA_x = dA\cos\alpha\,,\ \ dA_y = dA\sin\alpha$$

ta viết điều kiện cân bằng của phần phân tố chiếu lên các trục u và v

$$\sum U = \sigma_u dA + (\tau_{xy}\sin\alpha - \sigma_x\cos\alpha)dA_x + (\tau_{yx}\cos\alpha - \sigma_y\sin\alpha)dA_y = 0$$

$$\sum V = \tau_{uv} dA - (\tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_x\sin\alpha)dA_x + (\tau_{yx}\sin\alpha + \sigma_y\cos\alpha)dA_y = 0\,. \quad (2.10)$$



Hình 2.6. Ứng suất tại mặt nghiêng

Vì $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ từ điều kiện cân bằng trên ta tìm được

$$\sigma_u = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha\,. \qquad (2.11)$$

Theo định nghĩa về mặt chính nơi chỉ có ứng suất pháp còn ứng suất tiếp bằng không, ta tìm mặt cắt nghiêng mà tại đó $\tau_{uv} = 0$, từ (2.11) ta tìm được góc α

$$tg2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (2.12)$$

Thay góc α vừa tìm được vào (2.11) ta có được ứng suất chính

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \sigma_{\substack{1\\ 2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (2.13)$$

Tìm mặt cắt nghiêng mà ứng suất tiếp đạt cực trị từ điều kiện

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = 2\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - 2\tau_{xy}\sin 2\alpha = 0 \;\Rightarrow tg2\alpha_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{tg2\alpha_{\substack{\max\\ \min}}}$$

Điều này có nghĩa góc $2\alpha_0$ vuông góc với góc $2\alpha_{\substack{\max\\ \min}}$, vậy mặt cắt nghiêng mà ứng suất tiếp đạt cực trị tạo góc 45^0 với hướng chính và

$$\tau_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm\left|\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}\right| \qquad (2.14)$$

Các thành phần ứng suất trên mặt nghiêng bất kì có thể biểu diễn qua ứng suất chính

$$\sigma_u = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\sin^2\alpha \;\text{ và }\; \tau_{uv} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha$$

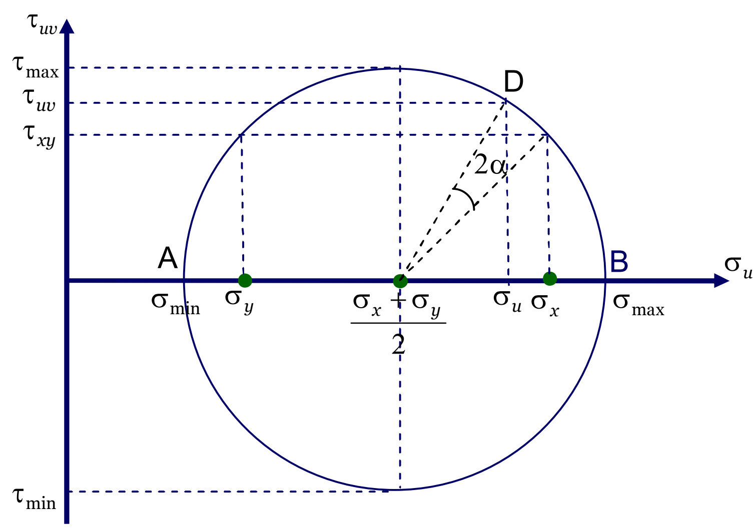
Từ các công thức (2.11) ta có

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Đây là phương trình đường tròn trong hệ tọa độ σ_u, τ_{uv} có tâm C ở tọa độ $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ và bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$. Các điểm trên đường tròn này biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên các mặt nghiêng được gọi đường tròn Mohr.

Dựng đường tròn Mohr cho điểm có trạng thái ứng suất σ_x, σ_y, τ_{xy} như sau

- Dựng hệ trục tọa độ (σ_u, τ_{uv}), trên trục σ_u lấy hai điểm C_1 và C_2 có tọa độ là σ_y, σ_x tương ứng, khi đó điểm C trung điểm của đoạn C_1C_2 là tâm của đường tròn Mohr
- Từ tâm C vẽ đường tròn có bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
- điểm A, B là hai điểm đường tròn cắt trục σ_u biểu diễn trang thái ứng suất tại mặt chính với các giá trị ứng suất pháp cực trị σ_{max}, σ_{min} và $\tau_{uv} = 0$ (hình 2.7)



Hình 2.7. Đường tròn Morh của trạng thái ứng suất phẳng

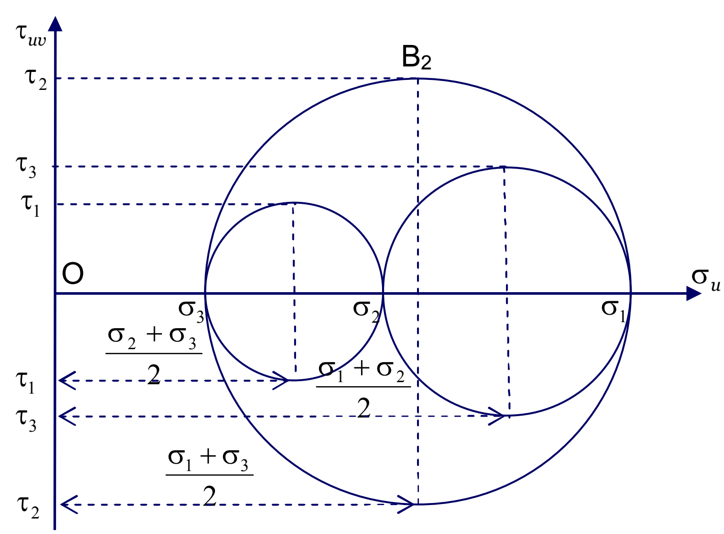
– điểm M, N là hai điểm đường tròn cắt đường thẳng đi qua tâm C song song với trục τ_u biểu diễn trang thái ứng suất tại mặt có các giá trị ứng suất tiếp cực trị $\tau_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\left|\dfrac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}\right|$ và ứng suất pháp $\sigma_u = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ (hình 2.7)

– điểm D là biểu diễn trạng thái ứng suất trên mặt nghiêng góc α so với tọa độ ban đầu

Đối với trạng thái ứng suất khối, với quy ước $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ta dựng được 3 đường tròn Mohr.

– Đường tròn nhỏ nhất đi qua hai điểm σ_3 và σ_2 có tâm tại điểm A1$\left(\dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$, bán kính $\left(\dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)$cho ta biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp của các mặt phẳng song song với phương chính thứ nhất

– Đường tròn đi qua hai điểm σ_2 và σ_1 có tâm tại điểm A2$\left(\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$, bán kính $\left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)$ cho ta biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp của các mặt phẳng song song với phương chính thứ ba



Hình 2.8. Ba đường tròn Morh của trạng thái ứng suất khối

– Đường tròn to nhất đi qua hai điểm σ_3 và σ_1 có tâm tại điểm $A_3\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2},0\right)$, bán kính $\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)$ cho ta biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp của các mặt phẳng song song với phương chính thứ hai. Đường tròn tô nhất này là đường tròn giới hạn hay đường tròn chính.

Ba điểm B_1, B_2 và B_3 biểu diễn trang thái ứng suất tại các mặt nghiêng song song lần lượt vói các mặt chính thứ nhất, thứ hai và thứ ba và nghiêng 45^0 với hai mặt còn lại. Tại đó ứng suất tiếp đạt cực trị

$$A_1B_1=\tau_1=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\ A_2B_2=\tau_2=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2},\ A_3B_3=\tau_3=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2},$$

còn ứng suất pháp tại các mặt đó lần lượt bằng

$$OA_1=\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2},\ OA_2=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2},\ OA_3=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}.$$

2.1.5 Quan hệ giữa ứng suất và nội lực

Ứng suất của một điểm bất kì trên mặt cắt ngang của thanh chiếu lên thành các thành phần σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}. Khi đó ta có quan hệ giữa ứng suất và nội lực trên mặt cắt thanh như sau

$$N=\int_A \sigma_x dA;\ Q_y=\int_A \tau_{xy} dA;\ Q_z=\int_A \tau_{xz} dA,$$

$$M_{xo}=\int_A \left(y\tau_{xz}-z\tau_{xy}\right)dA;\ M_y=\int_A z\sigma_x dA;\ M_z=\int_A y\sigma_x dA.$$

2.2 Trạng thái biến dạng

2.2.1 Chuyển vị và biến dạng

Chuyển vị là sự thay đổi vị trí của một điểm, hay góc quay của đoạn thẳng nối hai điểm dưới tác động của ngoại lực.

Biến dạng sự thay đổi hình dạng kích thước của vật thể dưới tác dụng của tải trọng. *Biến dạng tại lân cận điểm là* tập hợp hàm tọa độ xác định độ dãn của đoạn vật chất vô cùng nhỏ đi qua điểm cho trước và xác định thay đổi góc giữa hai đoạn vật chất vô cùng bé.

Khi xét chuyển vị của thanh ta xét sự thay đổi vị trí của tiết diện trước và sau khi thanh bị biến dạng. Chuyển vị của thanh gồm chuyển động tịnh tiến của trọng tâm tiết diện và chuyển động quay của hình phẳng tiết diện quanh trọng tâm

Biến dạng của thanh là sự thay đổi kích thước và hình dáng của tiết diện, sự thay đổi chiều dài, độ cong, độ xoắn của trục thanh.

Thông thường sức bền vật liệu quan tâm chủ yếu đến biến dạng của trục thanh, theo biến dạng của trục thanh ta có thể phân loại

- Thanh chịu kéo hoặc nén: trục thanh không bị cong, các tiết diện chỉ chuyển động tịnh tiến dọc trục thanh do vậy trục thanh bị co lại hoặc giãn ra
- Thanh chịu cắt: trục thanh không thay đổi độ cong nhưng bị gián đoạn, các tiết diện trượt so với nhau và không biến dạng
- Thanh chịu xoắn: trục thanh không bịộ cong và cũng không thay đổi độ dài, các tiết diện không có chuyển vị tịnh tiến chỉ có chuyển vị quay quanh trọng tâm trong mặt phẳng của tiết diện
- Thanh chịu uốn: trục thanh bị cong đi, nhưng độ dài trục thanh không đổi. Khi đó tồn tại cả chuyển vị tịnh tiến và chuyển vị quay của tiết diện
- Thanh chịu lực phức tạp là tổ hợp của bốn trường hợp trên. Như đã nói ở chương 1 ta có thể dùng nguyên lí cộng tác dụng để xét biến dạng của tiết diện thanh.

2.2.2 Ten xơ biến dạng

Với giả thiết biến dạng nhỏ ta có quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị (u,v,w) chính là hệ thức Cauchy

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),\ \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (2.15)$$

Ý nghĩa vật lí

ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} là độ dãn của các sợi vật chất khi biến dạng theo các trục

$2\varepsilon_{xy}$, $2\varepsilon_{yz}$, $2\varepsilon_{zx}$ là cosin của các góc giữa hai phần tử đường sau biến dạng, độ biến dạng trượt

Như vậy trạng thái biến dạng xác định bằng ten xơ biến dạng, cũng là ten xơ bậc hai đối xứng

$$\varepsilon_{ij} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{x} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{y} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{z} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Ta cũng có thể tìm được hướng chính là hướng chỉ có các thành phần tenxơ trên đường chéo khác không từ phương trình

$$\left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_{(\alpha)}\right)\nu_i = 0 \tag{2.17}$$

Biến dạng chính xác định từ phương trình

$$\mathbf{Det}\left|\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_{(\alpha)}\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{(\alpha)}^3 - E_1\varepsilon_{(\alpha)}^2 + E_2\varepsilon_{(\alpha)} - E_3 = 0 \tag{2.18}$$

trong đó

$$\mathrm{E}_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \theta_e$$

$$\mathrm{E}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} \right\} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right) = \left(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1\right)$$

$$\mathrm{E}_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = Det\left|\varepsilon_{ij}\right| = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \tag{2.19}$$

là các bất biến của ten xơ biến dạng

Biến dạng trượt chính biểu diễn bằng:

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \tag{2.20}$$

Biến dạng góc được định nghĩa

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy},\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz},\ \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx} \tag{2.21}$$

2.3 Định luật Hooke

Khi vật liệu đồng nhất, đẳng hướng và biến dạng của vật thể là đàn hồi tuyến tính và có trị số bé ta có định luật Hooke biểu diễn quan hệ giữa ứng suất và biến dạng

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right],\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right],$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy},\ \varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{yz},\varepsilon_{zx} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{zx},$$

$$\rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \tag{2.22}$$

trong đó E là mô đun đàn hồi, ν là hệ số Poision và mô dun trượt G tính qua E và ν bằng công thức

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.23}$$

Ngược lại, có thể biểu diễn ứng suất qua biến dạng

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\theta_e + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_x,\ \sigma_y = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\theta_e + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_y,$$

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\theta_e + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_z,$$

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma_{xy},\ \tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz} = G\gamma_{yz},\ \tau_{zx} = 2G\varepsilon_{zx} = G\gamma_{zx}. \tag{2.24}$$

Quan hệ (2.22 và 2.24) của định luật Hooke có thể viết dưới dạng ma trận

$$\{\varepsilon\} = [e]\{\sigma\} \tag{2.25}$$

trong đó $\{\varepsilon\}$ là vectơ của sáu thành phần biến dạng

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \tag{2.26}$$

và $\{\sigma\}$ là vectơ của sáu thành phần ứng suất

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \tag{2.27}$$

còn [e] là ma trận vuông đối xứng có dạng

$$[e] = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Nghịch đảo của phương trình 2.25 là biểu diễn của ứng suất qua biến dạng hay dạng ma trận của phương trình 2.24

$$\{\sigma\} = [d]\{\varepsilon\} \tag{2.29}$$

trong đó ma trận [d] là nghịch đảo của ma trận [e] cũng là ma trận vuông đối xứng

$$[d] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

[d] và [e] là các ma trận hệ số đàn hồi

2.3.2 Hệ thức giữa các hằng số đàn hồi

Ngoài môđun đàn hồi Young E, hệ số Poisson ν người ta dùng các hằng số đàn hồi khác như hệ số Lame λ, môđun nén thể tích K và môdun trượt G.

Ta xem mô dun nén thể tích tính qua môđun đàn hồi Young E, hệ số Poisson ν như thế nào

Môdun nén thể tích K

Xét trường hợp nén đều mọi phía $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p; \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

Đặt vào phương trình (2.24) ta cộng ba phương trình đầu vào ta được

$$\frac{E}{(1-2\nu)}\theta_e = -3p$$

Suy ra

$$p = -\frac{E}{3(1-2\nu)}\theta_e$$

$$\Rightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{2.31}$$

Trong bảng 2.1 là các liên hệ giữa các hằng số đàn hồi khác nhau.

Bảng 2.1. Liên hệ giữa các hằng số đàn hồi

Hằng số đàn hồi	Đôi chính				
	λ, G	K, G	G, ν	E, ν	E,G
λ		$K-\frac{2}{3}G$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
G				$\frac{E}{2(1+\nu)}$	
K	$\lambda+\frac{2}{3}G$		$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$
E	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$2G(1+\nu)$		
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$			$\frac{E}{2G}-1$

2.3.3. Định luật Hooke với hai hằng số G và K

Với hai hằng số mô dun nén thể tích K và mô đun trượt G ta có các biểu diễn của định luật Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\left[\sigma_x - \left(1-\frac{2G}{3K}\right)\sigma\right],\ \varepsilon_y = \frac{1}{2G}\left[\sigma_y - \left(1-\frac{2G}{3K}\right)\sigma\right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G}\left[\sigma_z - \left(1-\frac{2G}{3K}\right)\sigma\right],$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy},\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\tau_{yz},\ \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G}\tau_{zx}. \qquad (2.32)$$

$$\sigma_x = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\theta_e + 2G\varepsilon_x,\ \sigma_y = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\theta_e + 2G\varepsilon_y,$$

$$\sigma_z = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\theta_e + 2G\varepsilon_z,$$

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma_{xy},\ \tau_{yz} = 2Ge_{yz} = G\gamma_{yz},\ \tau_{zx} = 2Ge_{zx} = G\gamma_{zx}. \qquad (2.33)$$

Ma trận độ mềm [e] biểu diễn qua hằng số K và G như sau

$$[e] = \frac{1}{6KG}\begin{bmatrix} 2G & 2G-3K & 2G-3K & 0 & 0 & 0 \\ 2G-3K & 2G & 2G-3K & 0 & 0 & 0 \\ 2G-3K & 2G-3K & 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6K \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

và tương tự ma trận độ cứng [d] có dạng

$$[d] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3K+4G & 3K-2G & 3K-2G & 0 & 0 & 0 \\ 3K-2G & 3K+4G & 3K-2G & 0 & 0 & 0 \\ 3K-2G & 3K-2G & 3K+4G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3G \end{bmatrix} \qquad (2.30)$$

Kết luận chương 2

Trong chương hai trình bày về trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng. Trạng thái ứng suất phẳng được trình bày kĩ hơn vì trong bài toán thanh chủ yếu ta gặp trạng thái ứng suất này. Giới thiệu cách biểu diễn trạng thái ứng suất phẳng bằng đường tròn Morh. Mở rộng cách biểu diễn bằng đường tròn Morh cho trạng thái ứng suất khối.

Quan hệ ứng suất và biến dạng cho vật liệu đồng nhất đẳng hướng và ứng xử đàn hồi tuyến tính được trình bày trong mục 2.3. Định luật Hooke cho vật liệu ứng xử tuyến tính có thể biểu diễn dưới dạng ma trận. Giới thiệu ma trận độ mềm và độ cứng của vật liệu. Định luật Hooke không chỉ biểu diễn qua hai hằng số là mô đun đàn hồi Young E và hệ số Poission ν,mà còn có thể biểu diễn qua các hằng số khác như hệ số Lame λ, mô đun nén thể tích K và mô đun trượt G.

CHƯƠNG 3

Các lí thuyết bền

3.1 Thế năng biến dạng đàn hồi

Công thực hiện bởi hệ lực tác động lên kết cấu được lưu giữa trong kết cấu đàn hồi dưới dạng năng lượng biến dạng đảm bảo không có công nào bị thất thoát dưới dạng động năng gây ra dao động hay nhiệt năng làm tăng nhiệt độ. Nói cách khác, lực tác động từ từ để ứng suất không vượt qua ứng suất giới hạn của vật liệu. Khi ta từ từ cất tải thì nội năng sẽ được phục hồi làm cho kết cấu trở về hình dạng ban đầu. Như vậy, công ngoại lực W và nội năng U bằng nhau

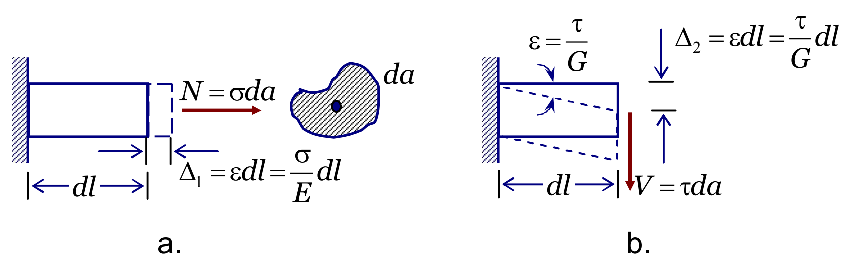
$$W = U \tag{3.1}$$

Liên hệ này có thể dùng để tính chuyển vị hay lực, nhưng đầu tiên ta phải xem xét cách tính nội năng biến dạng (hay còn gọi là thế năng biến dạng đàn hồi).

Từ kết cấu đàn hồi ta xét một phân tử nhỏ dạng thanh với diện tích mặt cắt ngang là da và độ dài là dl. Có thể có ứng suất pháp Hình 3.1a hay ứng suất tiếp Hình 3.1b tác dụng trên bề mặt diện tich da. Giả thiết rằng đầu trái B của phần tử bị ngàm chặt còn đầu phải C tự do. Chuyển vị của C do hai loại ứng suất là

$$\Delta_1 = \frac{\sigma}{E} dl \quad \Delta_2 = \frac{\tau}{G} dl$$

ở đây E hệ số đàn hồi khi kéo nén, G hệ số đàn hồi khi trượt.



Hình 3.1. Phần tử thanh

Nếu tác động từ từ lực σda và τda để gây nên các chuyển vị trên, thì năng lượng lưu trữ trong phần tử sẽ là

$$dU_1 = \frac{1}{2}(\sigma da)\Delta_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}dlda$$

$$dU_2 = \frac{1}{2}(\tau da)\Delta_2 = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}dlda$$

Dùng ε ký hiệu chung cho biến dạng, hai phương trình trên có dạng

$$dU = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon dv \tag{3.2}$$

ở đây $dv = dl \cdot da$ là thể tích của phần tử đang xét, σ là ứng suất tổng quát, có thể là ứng suất pháp hay ứng suất tiếp.

Biến dạng ε trong phương trình 3.2 nếu do ứng suất pháp thì có giá trị $\varepsilon = \sigma/E$, nếu do ứng suất tiếp thì $\varepsilon = \tau/G$. G và E có liên hệ với nhau bằng

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ở đây ν là hệ số Poisson, do vậy biến dạng do ứng suất tiếp có thể viết

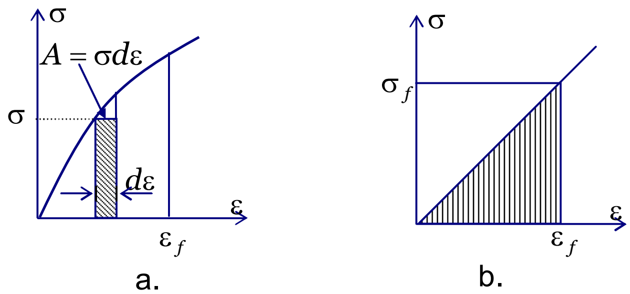
$$\varepsilon = \frac{2\tau(1+\nu)}{E}.$$

Gia số của năng lượng biến dạng trong một phần tử đàn hồi với thể tích là dv khi biến dạng thay đổi từ $\varepsilon = 0$ đến $\varepsilon = \varepsilon_f$ là

$$dU = dv\int_0^{\varepsilon_f}\sigma d\varepsilon \tag{3.3}$$

ở đây tích phân bên vế phải được gọi là mật độ năng lượng biến dạng và bằng phần diện tích bên dưới đường cong ứng suất biến dạng của vật liệu (Hình 3.2a). Nếu vật liệu tuân thủ định luật Hooke (Hình 3.2b) ta có mật độ năng lượng biến dạng bằng

$$dU = \frac{1}{2}\sigma_f\varepsilon_f$$



Hình 3.2. Đường cong ứng suất biến dạng (a) và mật độ năng lượng (b)

Tổng năng lượng biến dạng trong kết cấu tuyến tính sẽ là

$$U=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{6}\int_{v}\sigma_m\varepsilon_m dv \qquad (3.4)$$

m biểu diễn dạng ứng suất và dạng biến dạng tương ứng. Có nghĩa tích phân được lấy trên toàn bộ thể tích của kết cấu cho từng loại ứng suất riêng biệt.

Trong một số trường hợp ta dùng liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Quan hệ $\varepsilon=\sigma/E$ cho vật liệu tuyến tính chỉ áp dụng cho ứng suất pháp của mặt phẳng.

Dùng các ký hiệu $\{\varepsilon\}$ là vectơ của sáu thành phần biến dạng

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}\}^T$$

và $\{\sigma\}$ là vectơ của sáu thành phần ứng suất

$$\{\sigma\}=\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}\}^T$$

ta có biểu thức

$$U=\frac{1}{2}\int_{v}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dv \qquad (3.5)$$

hay $U=\frac{1}{2}\int_{v}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dv$ (3.5a)

Sử dụng quan hệ ứng suất biến dạng (2.25) và (2.39) thế vào (3.5) hay (3.5a) ta có

$$U = \frac{1}{2}\int_v \{\sigma\}^T [e] \{\sigma\} dv \tag{3.6}$$

và

$$U = \frac{1}{2}\int_v \{\varepsilon\}^T [d] \{\varepsilon\} dv \tag{3.6a}$$

Dạng của ma trận [e] và [d] cho trong (2.28) và (2.30).

Thế năng biến dạng đàn hồi riêng

Trạng thái ứng suất đơn

$$U = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon \tag{3.7}$$

Trạng thái ứng suất khối $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)$$

Dùng định luật Hooke biểu diễn biến dạng chính qua ứng suất chính ta có

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] \tag{3.8}$$

Thế năng biến dạng đàn hồi thể tích và hình dáng

Ta xem trạng thái ứng suất khối $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ như tổng của hai trạng thái ứng suất:

– trạng thái kéo nén đều theo 3 phương với các ứng suất chính là

$$\sigma_{tb} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \tag{3.9}$$

trạng thái này chỉ có biến dạng thể tích ko có biến dạng hình dáng

– trạng thái với ứng suất chính là

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_{tb},\ \sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_{tb},\ \sigma_2' = \sigma_3 - \sigma_{tb}, \tag{3.10}$$

Ta thấy $\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$, trạng thái này chỉ có biến dạng hình dáng

Như vậy

$$U = U_{tt} + U_{hd} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} U_{tt} &= \frac{1}{2E}\left[\sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 - 2\mu\left(\sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb}\right)\right] \\ &= 3\frac{1-2\mu}{2E}\sigma_{tb}^2 = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} U_{hd} &= U - U_{tt} \\ &= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] - \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 \\ &= \frac{1+\mu}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.2 Đặc trưng cơ học của vật liệu

Vật liệu có thể phân loại thành hai loại theo biến dạng:

- Vật liệu dẻo là vật liệu bị phá hủy khi biến dạng lớn, như thép, đồng, nhôm và chất dẻo
- vật liệu dòn bị phá hủy khi biến dạng bé, như gang, bê tông, đá

Sự phân loại này chỉ là quy ước và mang tính tương đối.

Để xác định đặc trưng cơ học của vật liệu người ta tiến hành các thí nghiệm kéo, nén mẫu vật liệu trên máy chuyên dụng kéo và nén.

3.2.1 Trình tự thí nghiệm

- Tiến hành đo liên tục các đại lượng: lực kéo (nén) F và độ dãn dài ΔL của mẫu thí nghiệm
- Với giả thiết ứng suất phấn bố đều trên toàn bộ diện tích tiết diện A, ta tính ứng suất $\sigma = F / A$, ở đây A là diện tích ban đầu của tiết diện.
- Tính biến dạng dọc tương ứng $\varepsilon = \Delta L / L$, với L là chiều dài ban đầu của mẫu vật liệu.
- Sau đó vẽ đồ thị biểu diễn quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trên hệ trục $\sigma - \varepsilon$

3.2.2 Mẫu thí nghiệm

Mẫu thí nghiệm phải được chế tạo tuân thủ các tiêu chuẩn và quy phạm đo lường tiêu chuẩn. Thường

- Mẫu chịu kéo có hình dáng là các thanh lăng trụ với hai kiểu tiết diện
  + có tiết diện tròn với chiều dài L bằng 10 lần đường kính L=10d (mẫu dài) hoặc chiều dài L bằng 5 lần đường kính L=5d (mẫu ngắn)
  + tiết diện chữ nhật với tỉ lệ cạnh ngắn trên cạnh dài trong khoảng $[0,2 \div 1]$, chiều dài $L = 11,3\sqrt{A}$ cho mẫu dài và $L = 5,65\sqrt{A}$ cho mẫu ngắn
- mẫu chịu nén là các thanh hình trụ tròn với chiều cao h nhỏ hơn hoặc ba lần đường kính để đảm bảo trục thanh thẳng trọng khi làm thí nghiệm. Mẫu nén bê tông thường có hình dạng là khối lập phương các cạnh 15cm, 20cm hoặc trụ tròn ngắn đường kính 10cm

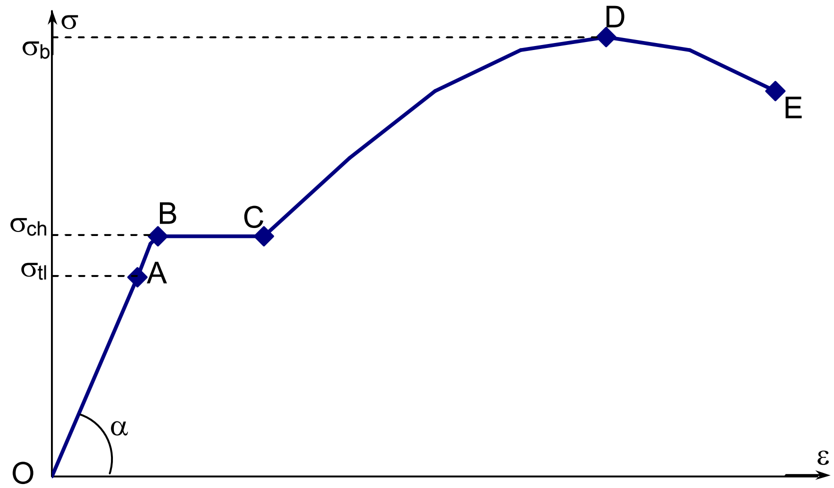
3.2.3 Đồ thị thí nghiệm

Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

Đồ thị thí nghiệm kéo vật liệu dẻo (hình 3.3) gồm ba giai đoạn chính.

- Giai đoạn tỉ lệ là đoạn OA trên đồ thị. Khi đó vật liệu làm việc đàn hồi tuân thủ định luật Hooke với biến dạng bé. σ_{tl} là ứng suất giới hạn tỉ lệ ứng với điểm A. Đoạn AB rất ngắn và trên điểm A vật liệu vẫn đàn hồi, đối với thép CT3 $\sigma_{tl} = 210MPa$
- Giai đoạn chảy là đoạn nằm ngang BC trên đồ thị. Khi đó ứng suất không thay đổi nhưng mẫu vẫn biến dạng. σ_{ch} là ứng suất giới hạn chảy ứng với điểm B. Độ dài đoạn BC tùy thuộc vào vật liệu. $\sigma_{ch} = 240MPa$ đối với thép CT3.
- Giai đoạn tái bền là đoạn CD. Trong giai đoạn này ứng suất tăng làm biến dạng tăng. Đoạn này được gọi là tái bền vì khi ta cất tải đường cong không quay về gốc O mà giảm theo tỉ lệ đến điểm có biến dạng dư. Sau đó lại chất tải tiếp thì đương cong ứng suất biến dạng sẽ có giới hạn tỉ lệ cao hơn. Chính vì tính chất này đoạn CD được gọi là đoạn tái bền. Đến điểm D mẫu thử đã

hình thành chỗ thắt, ứng suất ứng với điểm D được gọi là ứng suất giới hạn bền σ_b và đối với thép CT3 $\sigma_b = 380MPa$

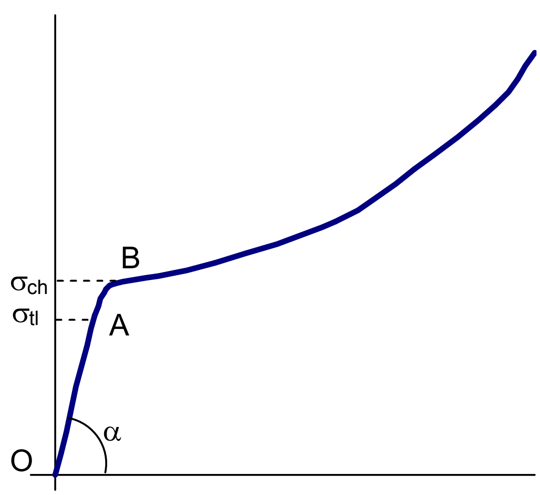


Hình 3.3. Quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

Như vậy, ba giới hạn σ_{tl}, σ_{ch} và σ_b là các đặc trưng cơ học của vật liệu và mô đun đàn hồi E chính là hệ số góc của đoạn OA $E = tg\alpha$

Thí nghiệm nén vật liệu dẻo

Đồ thị quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm nén vật liệu dẻo thể hiện trên hình 3.4.



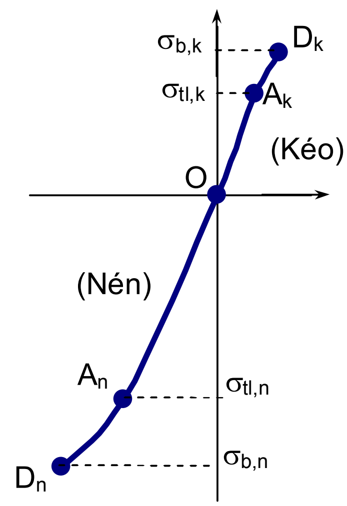
Hình 3.4. Quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm nén vật liệu dẻo

Ta có nhận xét

– Ứng suất giới hạn tỉ lệ σ_{tl} và giới hạn chảy σ_{ch} của vật liệu dẻo là như nhau trong cả trường hợp kéo và nén.

– Tuy nhiên sau giới hạn chảy, ứng suất nén tăng nhưng không làm cho mẫu vỡ, do vậy ứng suất phá hủy không thể xác định được

Thí nghiệm kéo và nén vật liệu dòn



Hình 3.5. Quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm kéo và nén vật liệu dòn

Đồ thị chỉ có một giai đoạn gần như thẳng và kết thúc khi mẫu bị phá hủy (bị kéo đứt hay nén vỡ).

Từ các đặc trưng cơ học của vật liệu ta có được giá trị ứng suất cho phép để kiểm tra điều kiện bền của kết cấu.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n} \tag{3.14}$$

trong đó khi vật liệu dẻo $\sigma_0 = \sigma_{ch}$, khi vật liệu dòn $\sigma_0 = \sigma_{b,k}$ hay $\sigma_{b,n}$. Còn n>1 là hệ số an toàn theo ứng suất cho phép, do xét đến các yếu tố thực tế ảnh hưởng tới độ bền của kết cấu. Cả hai giá trị ứng suất cho phép [σ] và hệ số an toàn n được quy định trong các tiêu chuẩn và quy phạm tính toán thiết kế.

3.3 Điều kiện bền của vật liệu

Trạng thái ứng suất đơn

$$\sigma \leq [\sigma] \tag{3.15}$$

Trạng thái ứng suất khối chỉ là suy diễn hình thức khó áp dụng trong thực tế vì khó làm thí nghiệm để có được các giá trị σ_1, σ_2, σ_3

$$\sigma_1 \leq [\sigma_1]; \quad \sigma_2 \leq [\sigma_2]; \quad \sigma_3 \leq [\sigma_3] \tag{3.16}$$

Giả thiết tổng quát về điều kiện bền có thể dưới dạng

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq C \tag{3.17}$$

trong đó σ_1, σ_2 và σ_3 là các ứng suất chính, C là đặc trưng cơ học của vật liệu.

Điều kiện bền tổng quát (3.16), tùy theo từng cách đánh giá và giả thiết ta có thể viết dưới dạng cụ thể và đơn giản hóa hơn. Những giả thuyết về nguyên nhân gây phá hủy cho ta thuyết bền cụ thể. Nguyên nhân này không phụ thuộc vào dạng trạng thái ứng suất, nhờ đó ta có thể viết các điều kiện bền của thạng thái ứng suất phức tạp khi chỉ có kết quả thí nghiệm cho trạng thái ứng suất đơn.

Ta sẽ viết các điều kiện bền dưới dạng

$$\sigma_{td} \leq [\sigma] \tag{3.18}$$

3.2.1 Thuyết bền ứng suất pháp cực đại – Thuyết bền thứ nhất

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số lớn nhất của ứng suất pháp đạt tới một giới hạn xác định

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_3| \leq [\sigma]_n \tag{3.19}$$

Biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ nhất sẽ là

$$\sigma_{tdI} = \sigma_1 \text{ khi } \sigma_1 > 0 \tag{3.20}$$

Nhận xét: thuyết bền này sơ sài và không phù hợp với thực nghiệm. Chỉ áp dụng cho trường hợp trạng thauis ứng suất đơn

3.2.2 Thuyết bền biến dạng dài cực đại – Thuyết bền thứ hai

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số biến dạng dài lớn nhất đạt tới một giới hạn xác định.

Nếu gọi biến dạng dài giới hạn là $[\varepsilon]$, thì ở trạng thái khối theo định luật Hooke

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \le [\varepsilon]$$

Ở trạng thái đơn theo định luật Hooke

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

sẽ có giới hạn $\Rightarrow \varepsilon \le \dfrac{[\sigma]}{E}$

Giới hạn không phụ thuộc vào dạng ứng suất nên ta có

$$[\varepsilon] \le \frac{[\sigma]}{E}.$$

Từ đây ta có điều kiện bền theo

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma] \qquad (3.21)$$

Biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ hai sẽ là

$$\sigma_{tdII} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \qquad (3.22)$$

Các thực nghiệm chỉ ra rằng thuyết bền thứ hai tương đối phù hợp với vật liệu dòn

3.2.3 Thuyết bền ứng suất tiếp cực đại - Thuyết bền thứ ba

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số lớn nhất của ứng suất tiếp đạt tới một giới hạn xác định.

Nếu gọi ứng suất tiếp giới hạn là $[\tau]$ với quy ước $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, ở trạng thái ứng suất khối ta có ứng suất tiếp lớn nhất

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \le [\tau]$$

Ở trạng thái đơn theo ta có ứng suất tiếp lớn nhất

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}$$

và sẽ có giới hạn $\frac{[\sigma]}{2}$

Giới hạn không phụ thuộc vào dạng ứng suất nên ta có

$$[\tau] \le \frac{[\sigma]}{2}.$$

Từ đây ta có điều kiện bền theo

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma] \qquad (3.23)$$

Biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ ba sẽ là

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_1 - \sigma_3 \qquad (3.24)$$

Thuyết bền thứ ba khá phù hợp với vật liệu dẻo, ứng với điều kiên dẻo Tresca-Saint-Venant

3.2.4 Thuyết bền thế năng biến dạng hình dáng cực đại – Thuyết bền thứ tư

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số lớn nhất của thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng đạt tới một giới hạn xác định

Nếu gọi thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng giới hạn là $[u]_{hd}$ thì ở trạng thái ứng suất khối

$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right) \le [u_{hd}]$$

Ở trạng thái đơn theo ta có thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng

$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_1^2$$

và sẽ có giới hạn $\frac{1+\mu}{3E}[\sigma]^2$

Giới hạn không phụ thuộc vào dạng ứng suất nên ta có

$$[u_{hd}] = \frac{1+\mu}{3E}[\sigma]^2.$$

Từ đây ta có điều kiện bền theo

$$\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1} \le [\sigma] \tag{3.25}$$

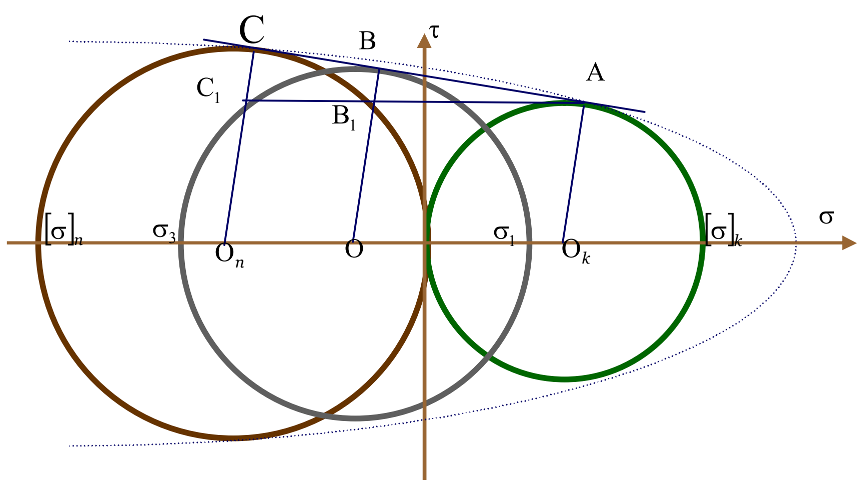
Biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ tư sẽ là

$$\begin{aligned}\sigma_{tdIV} &= \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}\end{aligned} \tag{3.26}$$

Cũng như thuyết bền thứ ba thuyết bền thứ tư tương đối phù hợp với vật liệu dẻo. Điều kiện bền thứ tư ứng với điều kiện dẻo của von-Mises

3.2.5. Thuyết bền Mohr – Thuyết bền thứ năm

Thuyết bền Morh được xây dựng dựa trên các cơ sở thực nghiệm. Một loạt thí nghiệm phá hủy được tiến hành. Ứng với mỗi thí nghiệm ta được một cặp giá trị $[\sigma]_k, [\sigma]_n$. Như vậy ta nhận được một họ các đường tròn Morh giới hạn (đường tròn to nhất trong ba đường tròn Morh của trạng thái ứng suất khối có bàn kính $0{,}5(\sigma_1-\sigma_3)$) trên mặt phẳng (σ,τ) hình 3.6. Dựng được đường bao các đường tròn Morh giới hạn chia mặt phẳng làm hai miền: trong và ngoài đường bao.



Hình 3.6.

Với giả thiết đường bao tìm được là duy nhất thuyết bền Morh phát biểu trạng thái ứng suất nào đó có đường tròn Morh giới hạn nằm trong đường bao là trạng thái đủ bền, vật liệu không bị phá hủy. Nếu ngược lại đường tròn Morh giới hạn nằm ngoài đường bao thì trạng thái ứng suất đó không đủ bền và vật liệu bị phá hủy.

Một trong những khó khăn để áp dụng thuyết bền Morh là phải làm một số lớn thí nghiệm. Để tránh khó khăn này Morh đề xuất vẽ đường báo dựa trên đường trionf kéo và nén và đường bao khi đó là đường thẳng (AC trên hình 3.6).

Giả sử ta có trạng thái ứng suất nào đó và dựng đượng đường tròn giới hạn, đường tròn này tiếp xúc với đường AC tại điểm B (hình 3.3). Khi đó từ cácđiều kiện hình học ta có

$$\frac{CC_1}{AC_1} = \frac{BB_1}{AB_1}$$

Biểu diễn độ dài các đoạn thẳng qua các ứng suất ta được

$$\frac{0{,}5([\sigma]_n - [\sigma]_k)}{0{,}5([\sigma]_n + [\sigma]_k)} = \frac{0{,}5(\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma]_k)}{0{,}5([\sigma]_k - \sigma_1 - \sigma_3)}$$

Từ biểu thức trên, rút gọn ta được

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}\sigma_3 \le [\sigma]_k, \Rightarrow \sigma_1 - \alpha\sigma_3 \le [\sigma]_k$$

Ứng suất tương đương của thuyết bền Mohr

$$\sigma_{tdV} = \sigma_1 - \alpha\sigma_3 \tag{3.26}$$

trong đó $\alpha = [\sigma_k]/[\sigma_n]$

Kết luận của chương 3

Chương ba trình bày cách tính thế năng biến dạng đàn hồi. Đưa ra biểu thức của thế năng biến dạng đàn hồi thể tích và hình dáng. Trình bày thí nghiệm kéo nén để xác định các đặc trưng cơ học của vật liệu. Mục 3.3 là mục quan trọng nhất của chương này trình bày năm thuyết bền thường dùng. Dùng khái niệm ứng suất pháp chính trong thuyết bền theo trạng thái ứng suất đơn, ta đưa ra điều kiện bền (3.18) chung cho tất cả các thuyết bền dưới dạng

$$\sigma_{td} \leq [\sigma]$$

Ứng với mỗi thuyết bền ta có công thức của ứng suất tương đương tương ứng.

PHẦN 1. CÁC BÀI TOÁN THANH

Nội dung của phần này xem xét các trường hợp chịu lực cơ bản của thanh. Đó là các trường hợp sau

- Thanh chịu kéo hoặc nén
- Thanh chịu xoắn, xem xét cả thanh chịu cắt
- Thanh chịu uốn
- Thanh chịu lực phức tạp

Như đã nói trong phần nhập môn ta cần xem xét ba bài toán cơ bản

- Bài toán kiểm tra độ bền, độ cứng và độ ổn định
- Bài toán thiết kế - lựa chọn hình dạng và kích thức tiết diện phù hợp cho từng bộ phận kết cấu
- Bài toán xác định tải trọng cho phép đặt lên kết cấu

Trình tự giải các bài toán thanh có thể tóm gọn trong các bước sau đây

Bước 1. Vẽ biểu đồ nội lực theo trình tự

- Tìm phản lực tại các liên kết từ các phương trình tĩnh học
- Dùng phương pháp mặt cắt từ điều kiện cân bằng ta có được biểu thức của nội lực.
- Vẽ biểu đồ nội lực

Bước 2. Dựa trên biểu đồ nội lực tính ứng suất lớn nhất σ_{max}

Bước 3. Kiểm tra bền. Ở đây sẽ phụ thuộc vào loại bài toán.

- Bài toán kiểm tra ta kiểm tra xem $\sigma_{max} \le [\sigma]$ để kết luận thanh đủ bền hay không
- Bài toán thiết kế từ điều kiện bền $\sigma_{max} \le [\sigma]$ lựa chọn kính thước thanh thỏa mãn điều kiện bền
- Bài toán xác định tải trọng cho phép P_b từ điều kiện $\sigma_{max} \le [\sigma]$ tìm tải trọng cho phép tác động lên thanh vẫn đảm bảo bền

Bước 4. Có kích thước và nội lực ta tính dịch chuyển của kết cấu để tìm $\delta_{\max}$

Bước 5. Kiểm tra độ cứng. Cũng như độ bền sẽ tùy thuộc vào dạng bài toán

- Bài toán kiểm tra ta kiểm tra xem $\delta_{\max} \le [\delta]$ kết luận thanh đủ cứng không.
- Bài toán thiết kế ta kiểm tra xem $\delta_{\max} \le [\delta]$ nếu không thỏa mãn ta lựa chọn lại kích thước đảm bảo điều kiện cứng này
- Bài toán xác định tải trọng cho phép P_c từ điều kiện $\delta_{\max} \le [\delta]$ tìm tải trọng cho phép tác động lên thanh vẫn đảm bảo cứng, tải trọng cho phép kết luận $P = \min(P_b, P_c)$

Bước 6. Kiểm tra ổn định của thanh nếu chịu nén

CHƯƠNG 4

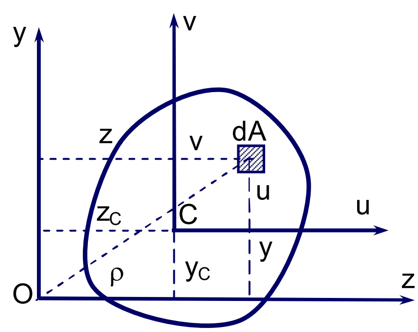
Các đặc trưng hình học

Khả năng chịu lực của thanh không chỉ phụ thuộc vào diện tích của tiết diện mà còn phụ thuộc vào các đặc trưng hình học khác của tiết diện. Trong chương này đưa ra các công thức tính các đặc trưng hình học như mô men tĩnh, mô men quán tính của các tiết diện phẳng

4.1 Mô men tĩnh và trọng tâm

Diện tích của hình phẳng được tính bằng tích phân

$$F = \int_F dF \qquad (4.1)$$



Hình 4.1. Tọa độ của phân tố

Công thức tính mô men tĩnh đối với trục y và trục z có dạng

$$S_y = \int_A z dA; \quad S_z = \int_A y dA \qquad (4.2)$$

thứ nguyên của mô men tĩnh là (chiều dài)^3, ví dụ (m^3)

Trục trung tâm là trục có mô men tĩnh bằng không. Trọng tâm của tiết diện là giao điểm của hai trục trung tâm.

Kẻ hai trục u và v vuông góc đi qua trong tâm C và song song với trục y và z, khi đó tọa độ y và z của phân tố dA biểu diễn qua tọa độ u và v và tọa độ trong tâm C trong hệ tọa độ Oyz như sau

$y = y_C + u$, $z = z_C + v$

Thế vào (4.2) ta được định lí Varignon

$$S_y = \int_A (z_C + v)dA = z_C \int_A dA + \int_A v dA = z_c A \Rightarrow z_c = \frac{S_y}{A}$$

$$S_z = \int_A (y_C + u)dA = y_C \int_A dA + \int_A u dA = y_c A \Rightarrow y_c = \frac{S_z}{A} \tag{4.3}$$

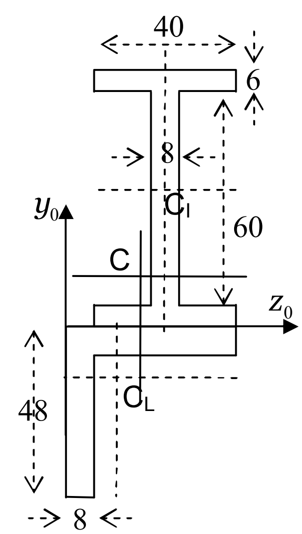
Từ định lí Varignon ta có nhận xét

- Các trục trung tâm cắt nhau tại một điểm hay bất kì trục nào đi qua trọng tâm là trục trung tâm
- Nếu có một trục đối xứng thì trọng tâm nằm trên trục đối xứng, nếu có hai trục đối xứng vuông góc thì trọng tâm là giao điểm của hai trục
- Trọng tâm của hình ghép xác định bằng công thức (phần rỗng có diện tich âm)

$$y_c = \frac{\sum y_{c_i} A_i}{A}; \quad z_c = \frac{\sum z_{c_i} A_i}{A} \tag{4.4}$$

Ví dụ. xác định trọng tâm của hình ghép trên hình 4.2

Chọn hệ tọa độ $y_0 z_0$ như trên hình vẽ khi đó tọa độ trọng tâm và diện tích của các hình chữ I và chữ L cho trong hàng 2 và 3 của bảng 4.1. Dùng công thức 4.4 ta tính được trọng tâm của hình ghép viết ở dòng 4 của bảng 4.1



Hình 4.2

Bảng 4.1

	z_C	y_C	A
Chữ I	28	36	960
Chữ L	14,91	-14,91	704
Hình ghép	22,4615	14,4615	1664

4.2 Các mô men quán tính

Công thức tính mô men quán tính trục của hình phẳng với trục Oy và Oz

$$I_y = \int_A z^2 dA; \quad I_z = \int_A y^2 dA \tag{4.5}$$

Mô men quán tính li tâm đối với hệ trục vuông góc Oyz

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad (4.6)$$

Mô men quán tính cực đối với gốc tọa độ

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = I_y + I_z \quad (4.7)$$

Từ các công thức trên ta có nhận xét

- Mô men quán tính có thứ nguyên chiều dài^4, ví dụ m^4
- Mô men quán tính cực là hằng số
- Mô men quán tính trục luôn dương
- Mô men quán tính li tâm I_{yz} dương, âm hoặc bằng không
- Hệ trục có mô men quán tính li tâm I_{yz} bằng không là hệ trục chính
- Hệ trục chứa trục đối xứng của hình phẳng là hệ trục quán tính chính
- Hệ trục quán tính chính trung tâm là hệ trục quán tính chính có gốc tại trọng tâm khi đó

$$S_y = 0,\ S_z = 0,\ I_{yz} = 0 \quad (4.8)$$

Mô men quán tính đối với trục quán tính chính trung tâm được gọi là mô men quán tính chính trung tâm (mô men quán tính chính)

- Mô men quán tính của hình ghép tính qua mô men của các hình thành phần

$$I_y = \sum_i I_{yi},\ I_z = \sum_i I_{zi},\ I_{yz} = \sum_i I_{yzi} \quad (4.9)$$

Chú ý phần rỗng được tính là có mô men quán tính âm

Bán kính quán tính đối với trục Oy hay Oz

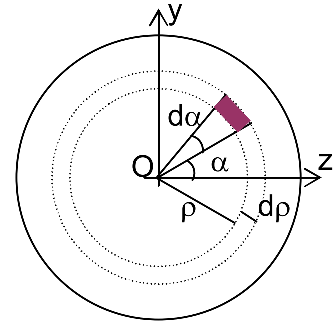
$$r_y = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}},\ r_z = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} \quad (4.10)$$

Ví dụ. Tính các mô men quán tính của hình tròn đường kính D.

Do tính chất đối xứng nên $I_z = I_y = I_\rho/2$. Ta chọn phân tố dA là hình được giới hạn bởi hai tia α và α+dα và hai đường tròn bán kính ρ và ρ+dρ (hình 4.3). Khi đó

$dA = \rho d\rho d\alpha$

Lắp vào công thức tính mô men quán tính cực



Hình 4.3

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\alpha = \frac{\rho^4 \alpha}{4}\Bigg|_0^{\frac{D}{2}}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2\pi D^4}{4 \cdot 2^4} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Từ đây ta có

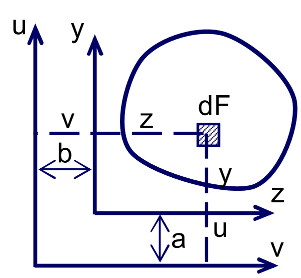
$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$

Có công thức tính mô men quán tính cho hình tròn, áp dụng công thức tính mô men quán tính cho hình ghép ta có công thức tính mô men quán tính của hình vành khăn với đường kính ngoài D và đường kính d

$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right)$, $I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}\left(1-\alpha^4\right)$, trong đó $\alpha = \frac{d}{D}$.

4.3 Công thức chuyển trục song song

Xét hệ trục Ouv song song với hệ trục ban đầu Oyz (hình 4.4)



Hình 4.4. Chuyển trục tọa độ song song

Khoảng cách giữa v và z là a, giữa u và y là b, vậy theo định nghĩa ta có

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (z+b)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2b\int_A zdA + b^2 \int_A dA$$

$$I_v = \int_A u^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a\int_A ydA + a^2 \int_A dA$$

$$I_{uv} = \int_A uvdA = \int_A (y+a)(z+b)dA = \int_A yzdA + a\int_A zdA + b\int_A ydA + ab\int_A dA$$

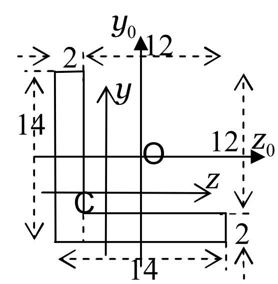
Ta rút ra liên hệ giữa mô men quán tính đối với hệ trục mới Ouv và mô men quán tính đối với hệ trục cũ Oyz

$$\begin{aligned} I_u &= I_y + 2bS_y + b^2A \\ I_v &= I_z + 2aS_z + a^2A \\ I_{uv} &= I_{yz} + aS_y + bS_z + abA \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nếu trục Oxy là trục trung tâm thì công thức (4.11) có dạng đơn giản hơn

$$\begin{aligned} I_u &= I_y + b^2A \\ I_v &= I_z + a^2A \\ I_{uv} &= I_{yz} + abA \end{aligned} \tag{4.11a}$$

Ví dụ Tính mô men quán tính chính trung tâm của tiết diện thép góc như trên hình 4.5



Hình 4.5

Thép góc được tạo thành từ hình vuông to có cạnh 14x14cm cắt bỏ đi một hình vuông nhỏ hơn ở góc trên bên phải có cạnh 12x12cm. Chọn hệ trục ban đầu Oy_0z_0 như trên hình vẽ, tìm trọng tâm của hình ghép theo công thức Vaginon (bảng 4.2). Phần cắt bỏ có diện tích âm

Bảng 4.2

	z_{Co} (cm)	y_{Co} (cm)	A (cm^2)	$I_z=I_y$ tính tại trục trung tâm riêng của hình	Khoảng cách từ trục riêng đến trục của hình ghép	$I_z=I_y$ của hình ghép (cm^4)
Hình to	0	0	2304	3201,333	2,769	4704,387
Hình nhỏ	1	1	-1600	-1728	3,769	-3773,82
Hình ghép	-2,769	-2,769	704			930,564

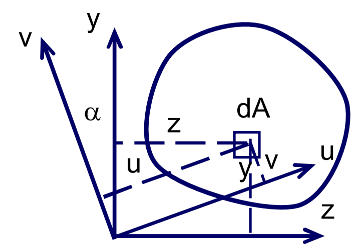
Ta tính mô men quán tính cho từng hình đối với trục trung tâm riêng của từng hình sau đó chuyển trục sang hệ trục trung tâm của hình ghép Cxy Phần cắt bỏ có mô men quán tính âm.

$$I_Z = I_y = I_{y1} + (z_C - z_{1C})^2 A_1 + I_{y2} + (z_C - z_{2C})^2 A_2 = -930{,}564cm^4$$

4.4 Công thức xoay trục

Xét hệ trục Ouv tạo được bằng cách quay Oyz một góc α (hình 4.6). Khi đó tọa độ trong hệ trục Ouv tính qua tọa độ trong hệ trục Oyz theo công thức

$$u = y\,\mathbf{sin}\,\alpha + z\,\mathbf{cos}\,\alpha; \quad v = y\,\mathbf{cos}\,\alpha - z\,\mathbf{sin}\,\alpha;$$



Hình 4.6. Xoay trục tọa độ đi một góc α

Theo định nghĩa mô men quán tính

$$I_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 dF$$
$$= \sin^2\alpha \int_F z^2 dF - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_F yzdF + \cos^2\alpha \int_F y^2 dF$$

$$I_v = \int_F u^2 dF = \int_F (y\sin\alpha + z\cos\alpha)^2 dF$$
$$= \sin^2\alpha \int_F y^2 dF + 2\sin\alpha\cos\alpha \int_F yzdF + \cos^2\alpha \int_F z^2 dF$$

$$I_{uv} = \int_F uvdF = \int_F (y\sin\alpha + z\cos\alpha)(y\cos\alpha - z\sin\alpha)dF$$
$$= \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\int_F yzdF + \sin\alpha\cos\alpha\left(\int_F y^2 dF - \int_F z^2 dF\right)$$

Từ đây ta công thức tính mô men quán tính khi xoay trục

$$I_u = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_v = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha \qquad (4.12)$$

Trục quán tính chính là trục có mô men quán tính li tâm bằng không. Từ điều kiện này ta tìm góc của trục quán tính chính với trục z

$$I_{uv} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow tg2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (4.13)$$

Biết góc α, thay vào hai biểu thức đầu tiên của (4.12) ta tính được các mô men quán tính đối với trục quán tính chính (gọi là mô men quán tính chính). Các mô men quán tính chính nhận các giá trị cực trị

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \quad (4.14)$$

Đồng thời cũng tìm được bán kính quán tính chính

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{F}}; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} \quad (4.15)$$

Kết luân chương 4

Chương bốn trình bày các công thức tính các đặc trưng hình học của hình phẳng như mô men tĩnh, các mô men quán tính.

Đưa ra các định nghĩa về hệ trục trung tâm, hệ trục chính, hệ trục quán tính chính trung tâm.

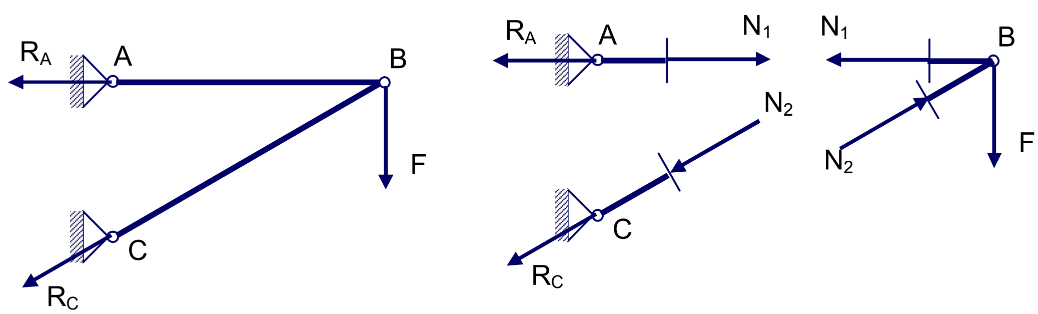
Trình bày các công thức tính mô men quán tính khi chuyển trục song song và khi xoay trục đi một góc α. Đồng thời cho quy tắc tính các đặc trưng hình học cho hình phẳng là hình ghép.

CHƯƠNG 5
Thanh thẳng chịu kéo, nén đúng tâm

5.1 Định nghĩa

Thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm khi trên tiết diện chỉ tồn tại một thành phần nội lực là lực dọc trục. Quy ước dấu của lực dọc trục: Lực dọc dương khi thanh chịu kéo và âm khi thanh chịu nén

Ví dụ. Xét thanh dàn chịu kéo (hình 5.1)



Hình 5.1. Nội lực dọc trục trong hệ dàn

Để tính nội lực trong thanh ta dùng phương pháp mặt cắt cắt thanh AB và BC thay thế liên kết bằng nội lực dọc thanh AB (N_1) và BC (N_2). Xét cân bằng tại điểm B ta có hai phương trình, từ đó ta tìm được nội lực

$$\sum Y = 0 \rightarrow N_2 \sin\alpha + F = 0 \rightarrow N_2 = -\frac{F}{\sin\alpha}$$
$$\sum X = 0 \rightarrow N_1 + N_2 \cos\alpha = 0 \rightarrow N_1 = -N_2 \cos\alpha = Fctg\alpha$$

Như vậy thanh AB chịu kéo, còn thanh BC chịu nén.

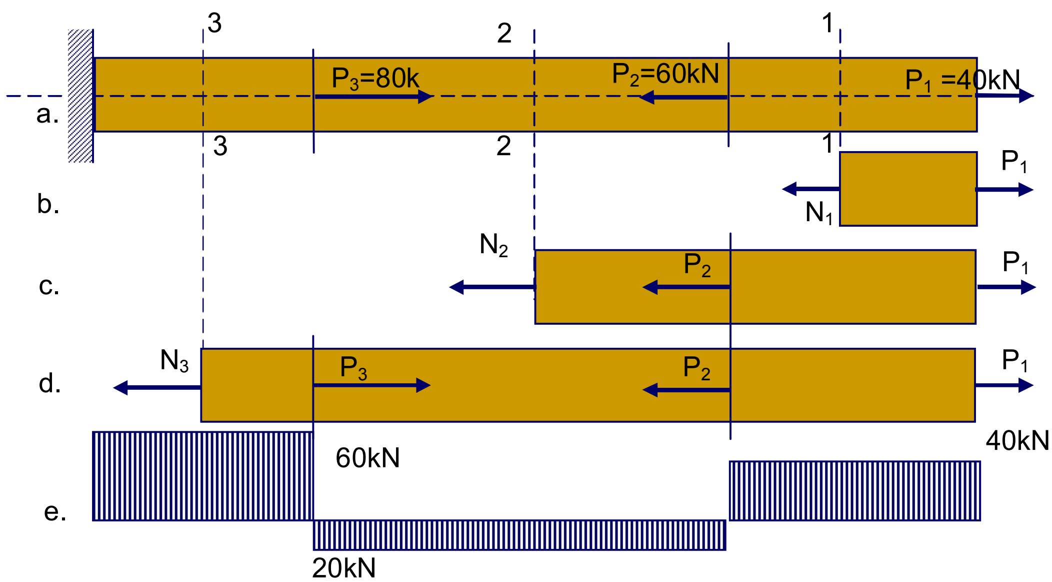
5.2 Biểu đồ lực dọc

Biểu đồ lực dọc biểu diễn sự biến thiên của lực dọc dọc theo trục của thanh. Để vẽ biểu đồ lực dọc ta dùng phương pháp mặt cắt để xác định lực dọc tại mặt cắt. Giá trị lực dọc N ở một mặt cắt của thanh bằng tổng đại số những ngoại lực dọc trục thanh (lực tập trung P hay lực phân bố q_x) tác dụng vào phần thanh ở về một bên của mặt cắt. Công thức tổng quát để xác định lực dọc trục tại một mặt cắt ngang như sau

$$N_x = \sum P_x + \sum \int q_x dx \qquad (5.1)$$

Ta giả định vec tơ N hướng ra phía ngoài của mặt cắt, xét điều kiện cân bằng tại mặt cắt của phần cắt, chính là công thức (5.1) sẽ cho ta cả giá trị và dấu của nội lực dọc trục.

Ví dụ. Xét thanh thẳng chịu lực như trên hình 5.2



Hình 5.2. Ví dụ vè biểu đồ nội lực dọc trục

Ta xét từ bên phải sang. vì đầu bên phải tự do không cần xác định phản lực.

Đoạn 1 từ đầu bên phải đến điểm đặt lực P_2 (hình 5.2b), xét cân bằng tại mặt cắt 1-1 với các lực bên phải ta tính được N_1

$$\sum X = 0 \rightarrow N_1 - P_1 = 0 \rightarrow N_1 = P_1 = 40kN$$

Đoạn 2 từ điểm đặt lực P_2 đến điểm đặt lực P_3 (hình 5.2c), xét cân bằng tại mặt cắt 2-2 với các lực bên phải ta tính được N_2

$$N_2 - P_1 + P_2 = 0 \rightarrow N_2 = P_1 - P_2 = 40 - 60 = -20kN$$

Tương tự xét đoạn 3 từ điểm đặt lực P_3 đến điểm ngàm (hình 5.2d), xét cân bằng tại mặt cắt 3-3 với các lực bên phải ta tính được N_3

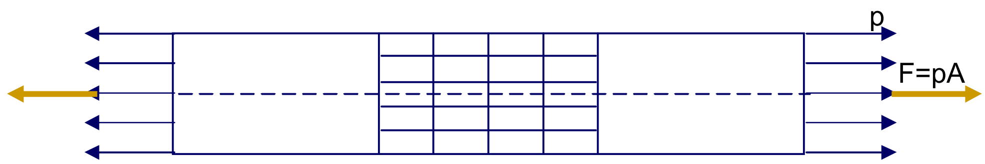
$$N_3 - P_3 + P_2 - P_1 = 0 \rightarrow N_3 = P_1 - P_2 + P_3 = 40 - 60 + 80 = 60$$

Biểu đồ lực dọc N vẽ trên hình 5.2e

5.3 Công thức ứng suất

5.3.1 Giả thiết về biến dạng của thanh

Xét thanh thẳng tiết diện không đổi. Kẻ các đường song song và các đường vuông góc với trục, đường vuông góc đặc trưng cho tiết diện, đường song song đặc trưng cho các lớp vật liệu. Cho thanh chịu kéo bởi hai hệ lực phân bố ở hai đầu có cùng cường độ p nhưng ngược chiều. Hợp lực F=pA nằm trên trục thanh



Hình 5.3. Giả thiết về biến dạng dọc của thanh

Bằng thực nghiệm ta có các nhận xét khi thanh chịu kéo, nén

- Các tiết diện của thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục
- Các lớp vật liệu dọc trục thanh không tương tác với nhau - bỏ qua ứng suất pháp trên các mặt cắt song song với trục thanh
- Các thớ vật liệu dọc trục có biến dạng dài bằng nhau

5.3.2 Biểu thức ứng suất

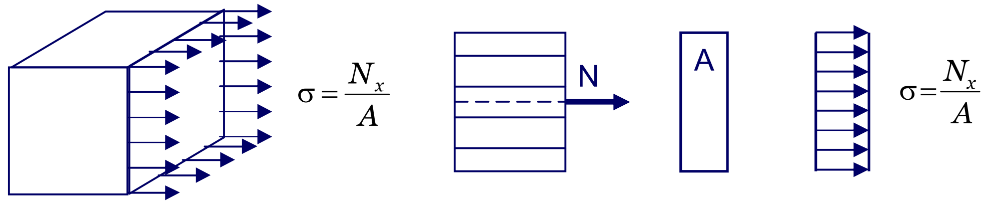
Từ giả thiết các tiết diện vẫn phẳng và vuông góc với trục ta có ứng suất tiếp bằng không chỉ còn ứng suất pháp. Từ giả thiết thứ hai ta chỉ còn ứng suất pháp theo phương của trục thanh. Theo định luật Hook ứng suất tỉ lệ với biến dạng dài

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \tag{5.1}$$

Từ giải thiết thứ ba biến dạng dài như nhau tại mọi thớ dọc, nên ứng suất cũng như nhau trên tiết diện ta có quan hệ ứng suất và nội lực

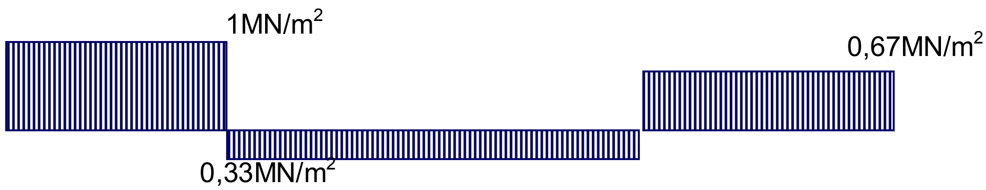
$$N_x = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x \int_A dA = \sigma_x A \tag{5.2}$$

$$\rightarrow \sigma_x = \frac{N_x}{A} \tag{5.3}$$



Hình 5.4. Ứng suất dọc trục trường hợp khối và phẳng

Ví dụ thanh chịu lực dọc trục trên hình 5.2a, giả thiết thanh có tiết diện không đổi với diện tich 20x30(cm) ta có biểu đồ ứng suất như trên hình 5.5



Hình 5.5. Biểu đồ ứng suất của thanh chịu lực dọc trục trên hình 5.2a

5.4 Biến dạng của thanh

5.4.1 Biến dạng dài dọc trục

Theo định luật Hook biến dạng dài dọc trục của một đơn vị chiều dài thanh là

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N_x}{EA} \tag{5.4}$$

Biến dạng dài dọc trục của một đoạn dx của thanh là

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x \Rightarrow \Delta dx = \varepsilon_x dx$$

Biến dạng dài dọc trục của thanh độ dài L, ký hiệu ΔL là

$$\Delta L = \int_L \varepsilon_x dx = \int_L \frac{N_x}{EA} dx \tag{5.5}$$

Khi $\frac{N_x}{EA}$ là hằng số trên toàn bộ độ dài thì

$$\Delta L = \frac{N_x L}{EA} \tag{5.6}$$

Khi $\frac{N_x}{EA}$ là hằng số trên từng đoạn chiều dài L_i thì

$$\Delta L = \sum_i \left(\frac{N_x L}{EA} \right)_i \tag{5.7}$$

Khi EA là hằng số trên toàn bộ độ dài thì

$$\Delta L = \frac{\int_L N_x dx}{EA} = \frac{\Sigma_N}{EA}, \text{ trong đó } \Sigma_N \text{ là diện tích của biểu đồ lực dọc.} \tag{5.8}$$

5.4.2 Biến dạng ngang (theo phương ngang)

Trạng thái ứng suất trong bái toán kéo, nén thanh thẳng là trạng thái ứng suất đơn chỉ có thành phần σ_x, do vậy theo định luật Hooke

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \varepsilon_x \tag{5.9}$$

Độ biến đổi diện tích mặt cắt ngang

$$\frac{\Delta F}{F} = -2\nu\varepsilon \tag{5.10}$$

Độ biến đổi thể tích của thanh tính theo công thức

$$\Delta V = \frac{(1-2\nu)}{E} \sum \int N_x dx \tag{5.11}$$

Độ biến đổi thể tích của thanh chịu kéo (nén) bởi lực P ở hai đầu thanh

$$\Delta V = \frac{(1-2\nu)}{E} PL \tag{5.12}$$

5.4.3 Thế năng biến dạng đàn hồi

Từ công thức (3.2) trong chương 3 ta có thế năng biến dạng đàn hồi riêng của trang thái ứng suất khối tổng quát

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

Trong bài toán thanh chịu kéo, nén đùng tâm chỉ có ứng suất pháp theo phương dọc trục, như vậy ứng suất chính của trạng thái ứng suất đang xét

$$\sigma_1 = \sigma_x ;\ \sigma_3 = \sigma_2 = 0 \tag{5.13}$$

Thay (5.13) vào biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi (3.2) ta được

$$U = \frac{1}{2E}\sigma_x^2 \tag{5.14}$$

Thay biểu thức của ứng suất pháp (5.3) vào (5.14) và lấy tích phân ta nhận được công thức tổng quát tính thế năng đàn hồi tích lũy sẽ có dạng

$$U = \sum\int \frac{N_x^2}{2EA}dx \tag{5.15}$$

5.4.4 Dịch chuyển tại các tiết diện

Khi thanh chỉ chịu kéo, nén ta chỉ có dịch chuyển dọc trục. Từ quan hệ ứng suất biến dạng và hệ thưc Cauchy ta có phương trình vi phân để timg dịch chuyển

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{EA}$$

Khi $\frac{N_x}{EA}$ là hằng số trên toàn bộ độ dài thì dịch chuyển dọc trục u là hàm bậc nhất

5.4.5 Dịch chuyển các điểm của hệ thanh liên kết khớp

Trình tự để tìm dịch chuyển đàn hồi các điểm của hệ thanh liên kết khớp như sau

- Xét điều kiện cân bằng tĩnh học để tìm lực dọc trục tại từng thanh
- Tính độ dãn tuyệt đối của từng thanh bằng định luật Hooke (5.5)
- Do các thanh không rời nhau khi biến dạng, bằng phương pháp đường giao nhau ta lập điều kiện chập dịch chuyển - quan hệ hình học giữa các thanh nối vào điểm đang xét
- Xác định các dịch chuyển cần tìm từ quan hệ hình học đã lập ở bước trên

Chú ý: Các thanh trong hệ không chỉ biến dạng dọc trục mà còn có thể quay quanh khớp nào đó. Như vậy mỗi điểm có thể dịch chuyển dọc trục thanh và dịch chuyển trên cung tròn có bán kính tương ứng. Thay cung tròn bằng đường vuông góc với bán kính quay vì biến dạng rất bé so với chiều dài.

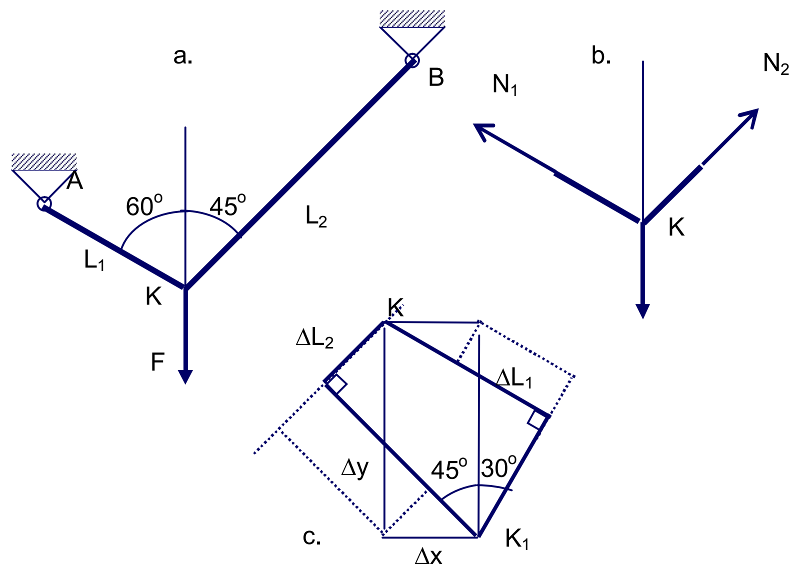
Ví dụ: Tìm dịch chuyển của điểm K trên hệ thanh liên kết khớp cho trên hình 5.6a

Từ điều kiện cân bằng tĩnh học tại điểm K (hình 5.6b) ta tìm được các lực dọc trục N_1 và N_2

$$\begin{cases} N_1 \sin 60^0 + N_2 \sin 45^0 = 0 \\ N_1 \cos 60^0 + N_2 \cos 45^0 - F = 0 \end{cases} \rightarrow N_1 = 21{,}96kN; N_2 = 26{,}89kN$$

Tính độ dãn tuyệt đối của thanh AK (ΔL_1) và thanh BK (ΔL_2)

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} = 2{,}2 \cdot 10^{-4} m, \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} = 5{,}38 \cdot 10^{-4} m$$



Hình 5.6. Ví dụ tìm dịch chuyển các điểm của hệ thanh liên kết khớp

Kéo dài thanh AK một đoạn ΔL_1 và thanh BK một đoạn ΔL_2. Kẻ các đường vuông góc với AK và BK tại các điểm đã kéo dài ra. Giao điểm của hai đường vuông góc này sẽ là ví trí của điểm K sau biến dạng. Ta thiết lập điều kiện chập dịch chuyển (hình 5.6c) nhận được hệ phương trình với ẩn là dịch chuyển của điểm K theo phương x và y

$$\begin{cases} \Delta L_1 = \Delta_x \cos 30^0 + \Delta_y \sin 30^0; \\ \Delta L_2 = -\Delta_x \cos 45^0 + \Delta_y \sin 45^0 \end{cases}$$

Thay các giá trị của ΔL_1 và ΔL_2 và giải hệ phương trình trên ta xác định được vị trí của điểm K

$$\begin{cases} 2,2\cdot 10^{-4} = 0,866\Delta_x + 0,5\Delta_y; \\ 5,38\cdot 10^{-4} = -0,707\Delta_x + 0,707\Delta_y \end{cases}$$

$$\Delta_x = -0,118mm;$$
$$\Delta_y = 0,644mm$$

5.5 Độ bền và độ cứng

Điều kiện bền của thanh chịu kéo, nén đúng tâm có dạng

$$|\sigma|_{\max} = \left|\frac{N}{A}\right|_{\max} \le [\sigma]_{k(n)} \qquad (5.16)$$

Từ điều kiện bền ta có các bài toán

- Bài toán kiểm tra bền – khi có được biểu đồ lực dọc trục ta kiểm tra điều kiện (5.16) xem thanh có đủ bền không.
- Bài toán thiết kế tim kích thước tiết diện chịu kéo hay chịu nén tính từ công thức

$$A = \frac{|N|_{\max}}{[\sigma]} \qquad (5.17)$$

trong đó N_{max} là giá trị tuyệt đối của lực dọc trên thanh, [σ] là ứng suất cho phép của vật liệu về kéo hoặc về nén.

- Bài toán xác định trị số an toàn của N tức là xác định tải trọng dọc trục N cho phép tác động lên thanh sao cho đảm bảo điều kiện bền.

$$N_b \le A[\sigma] \qquad (5.18)$$

Ngoài kiểm tra bền ta còn phải kiểm tra độ cứng xem dịch chuyển của điểm nào đó không vượt quá giới hạn cho phép

$$\delta_{\max} \le [\delta] \qquad (5.19)$$

Trong bái toán thiết kế, khi điều kiện cứng không thỏa mãn, ta sẽ phải lựa chọn lại kích thước tiết diện sao cho điều kiện (5.19) thỏa mãn.

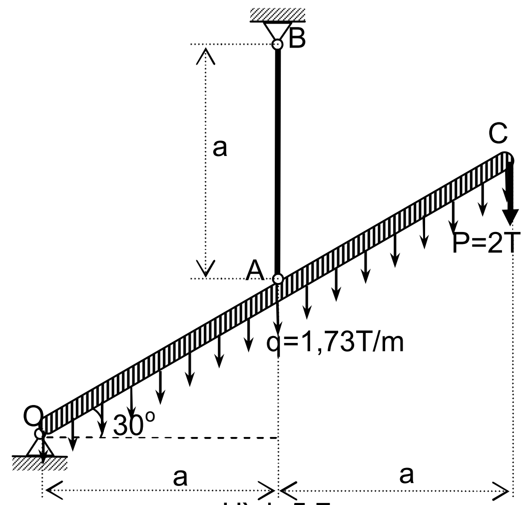
Ví dụ. Cho kết cấu chịu lực như trên hình vẽ 5.7. Thanh OAB cứng tuyệt đối. Cho $[\sigma] = 1600kG/cm^2$ và $[\delta_C] = 1,5mm$. Tìm diện tích tiết diện của thanh AB đảm bảo đủ bền và đủ cứng.

Cắt thanh AB, thay thế bằng nội lực N. Xét cân bằng của thanh OAC ta tìm được nội lực trong thanh AB

$$Na - P\cdot 2a - q\frac{2a}{\cos 30^0}\cdot a = 0 \Rightarrow N = 2P + \frac{4a}{\sqrt{3}}q = 12T$$

Tính diện tích tiết diện của thanh AB đảm bảo đủ bền, theo (5.16)

$$A = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{12000}{1600} = 7{,}5cm^2$$



Hình 5.7

Tính độ dãn dài của thanh AB

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} = \frac{12000\cdot 100}{7{,}5\cdot 2\cdot 10^6} = 0{,}08cm = 0{,}8mm$$

Tính dịch chuyển tại điểm C và kiểm tra điều kiện cứng (5.19)

$$\delta_C = \frac{2\Delta L}{\cos 30^0} = \frac{4\cdot 0{,}8}{\sqrt{3}} = 1{,}847mm > [\delta_C]$$

Như vậy dịch chuyển tại điểm C lớn hơn dịch chuyển cho phép. Ta tính lại diện tích tiết diện sao cho thỏa mãn điều kiện cứng. Đặt

$$\delta_C = [\delta_C]$$

ta tính được độ dãn dài của thanh AB sao cho thỏa mãn điều kiện trên

$$\Delta L = \frac{\sqrt{3}}{4}[\delta_C] \approx 0{,}65mm = 0{,}065cm$$

Từ đây ta tính được diện tích tiết diện tương ứng

$$A = \frac{12000\cdot 100}{2\cdot 10^6\cdot 0{,}065} = \frac{6}{0{,}65} = \frac{2}{0{,}25} \approx 9{,}23cm^2$$

5.6 Bài toán siêu tĩnh

Như đã định nghĩa hệ siêu tĩnh là hệ mà nếu chỉ dùng điệu kiện cân bằng tĩnh học ta không thể xác định được nội lực. Ngoài các điều kiện cân bằng tĩnh học ta còn phải sử dụng các điều kiện chập dịch chuyển. Quy trình giải bài toán như sau

– Bước 1. Lập phương trình cân bằng tĩnh học, xác định bậc siêu tĩnh của hệ

- Bước 2. Lập điều kiện chập dịch chuyển tức là xác định quan hệ hình học giữa các biến dạng của từng thành phần của hệ. Số phương trình hình học cần thiết lập phải bằng với số bậc siêu tĩnh của hệ.
- Bước 3. Dùng đinh luật Hooke viết biến dạng qua nội lực, thế vào quan hệ hình học đã lập ở bước trên đưa đến hệ phương trình gồm phương trình cân bằng và quan hệ hình học với ẩn là nội lực
- Bước 4. Giải hệ phương trình trên để tìm nội lực

Trường hợp có kể đến tải nhiệt độ ta tuân thủ quy trình trên nhưng trong bước 2 và bước 3 độ dãn dài được tính không chỉ do tác động của nội lực nà còn do giãn nở nhiệt

$$\Delta l_T = l\alpha\Delta T$$

trong đó l là chiều dài thanh, α là hệ số dãn nở nhiệt trung bình của vật liệu và ΔT – chênh lệch nhiệt độ.

Hệ siêu tĩnh chịu lực dọc trục, ngoài xác định nội lực còn có các bài toán.

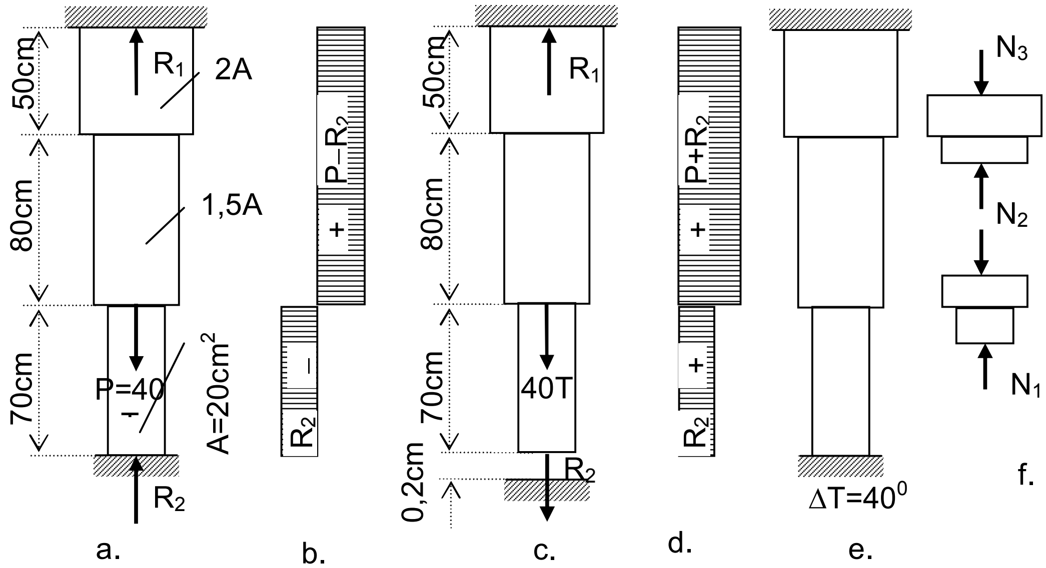
- Tính ứng suất lắp ghép: trong thực tế chiều dài của các thanh khi chế tạo có sai khác so với thiết kế, nên trong các điều kiện chập dịch chuyển ta có tính đến sai lệch này và tính được ứng suất lắp ghép sinh ra do sự sai lêch, này
- Xác định tải trọng tối đa theo ứng suất cho phép: ta chọn ứng suất lớn nhất bằng với ứng suất cho phép từ đó tính ra tải trọng cho phép lớn nhất
- Tính toán theo năng lực chịu tải: ta cho tất cả các ứng suất bằng ứng suất cho phép. Từ phương trình cân bằng tĩnh học ta tính ra tải trọng cực đại cho phép theo năng lực chịu tải. Đây chính là điều kiện chảy dẻo lí tưởng.

Ví dụ. Xét thanh với các sơ đồ chịu lực dọc trục như trên hình 5.8. Lấy E=2.10^6kG/cm^2 và hệ số dãn nở nhiệt $\alpha = 12{,}5 \cdot 10^{-6}$

Ơ đây ta xét ba trường hợp

- Thanh chịu lực dọc trục chịu ngàm hai đầu, số phản lực cần tìm là hai
- Thanh chịu lực dọc trục, nhưng có sai lệch ở đầu dưới, như vậy ta cần tím phản lực ở đầu trên và ứng suất lắp ghép ở đầu dưới

– Thanh chịu tải nhiệt chịu ngàm hai đầu, ta cần tìm phản lực tại hai đầu như trường hợp thứ nhất



Hình 5.8

Ta nhận thấy đây là các bài toán siêu tĩnh vì ta chỉ có một phương trình cân bằng đối với lực dọc trục.

$$\sum F_x = 0$$

Ta sẽ xét thêm điều kiện chập dịch chuyển, cụ thể cho tứng trường hợp

– Trường hợp trên hình 5.8a. Ta giải phóng liên kết ngàm hai đầu và thay bằng hai phản lực R_1 và R_2 ta có phương trình cân bằng

$$R_1 - 40 + R_2 = 0$$

Biểu đồ nội lực dọc trục với chiều phản lực quy ước có dạng như trên hình 5.8b.

Điều kiện chập dịch chuyển sẽ là tổng độ dãn dài của thanh bằng không.

$$\Delta L = 0$$

Thanh gồm ba đọan có tiết diện khác nhau, ta tính tổng độ dãn dài dựa trên biểu độ lực dọc trục 5.8b

$$\Delta L = \frac{50(P - R_2)}{E \cdot 2A} + \frac{80(P - R_2)}{E \cdot 1{,}5A} - \frac{70R_2}{E \cdot A} = 0 \Rightarrow R_2 = 21{,}124T$$

Từ phương trình cân bằng ta tìm được

$R_1 = 40 - R_2 = 18{,}876T$

– Trường hợp trên hình 5.8c. Ta giải phóng liên kết ngàm thay bằng phản lực R_1 và đặt ở đầu dưới lực lắp ghép R_2 ta có phương trình cân bằng

$R_1 - 40 - R_2 = 0$

Biểu đồ nội lực dọc trục với chiều phản lực quy ước có dạng như trên hình 5.8d.

Điều kiện chập dịch chuyển sẽ là tổng độ dãn dài của thanh bằng độ sai lệch.

$\Delta L = \delta$

Thanh gồm ba đoạn có tiết diện khác nhau, ta tính tổng độ dãn dài dựa trên biểu độ lực dọc trục 5.8d

$$\Delta L = \frac{50(R_2 + P)}{E \cdot 2A} + \frac{80(R_2 + P)}{E \cdot 1{,}5A} + \frac{70R_2}{E \cdot A} = \delta = 0{,}2 \;\Rightarrow R_2 = 32{,}81T$$

Từ phương trình cân bằng ta tìm được

$R_1 = 40 + R_2 = 72{,}81T$

– Trường hợp trên hình 5.8e. Do tác động của nhiệt độ các thanh đều dãn nở như vậy xuất hiện nội lực gây nén dọc trục ta có phương trình cân bằng hình 5.8f

$N_1 = N_2 = N_3 = N$

Điều kiện chập dịch chuyển sẽ là tổng độ dãn dài của thanh bằng không.

$\Delta L = 0$

Thanh gồm ba đoạn có tiết diện khác nhau, ta tính tổng độ dãn dài gồm cả dãn nở nhiệt

$$\Delta L = l_1\alpha\Delta t - \frac{Nl_1}{E2A} + l_2\alpha\Delta t - \frac{Nl_2}{E1{,}5A} + l_3\alpha\Delta t - \frac{Nl_3}{EA} = 0 \Rightarrow N \approx 24{,}27T$$

Kêt luận chương 5

Chương năm trình bày bài toán thanh chịu kéo, nén đúng tâm. Với các giả thiết về biến dạng bài toán kéo, nén có trạng thái ứng suất đơn.

Trong hệ thanh dàn không gian chịu kéo, nén dịch chuyển tại các nút liên kết khớp có thể tìm được bằng phương pháp đường giao nhau ta lập được các quan hệ hình học.

Với các điều kiện bền và điệu kiện cứng trong bài toán kéo, nén đúng tâm cho phép ta giải quyết ba bài toán cơ bản: kiểm tra bền của thánh chịu kéo, nén; thiết kế kích thước tiết diện ngang của thanh chịu kéo, nén và bài toán tìm tải trọng cho phép

Bài toán siêu tĩnh khi chỉ chịu kéo, nén cũng được xem xét. Khi đó ngaoif phương trình cân bằng ta cần thiết lập các điều kiện chập dịch chuyển.

CHƯƠNG 6
Thanh thẳng chịu xoắn

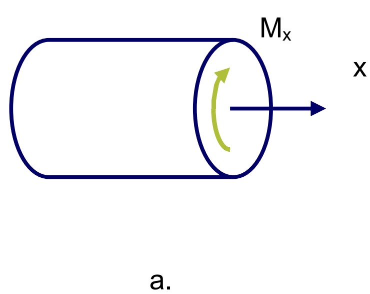
6.1 Định nghĩa

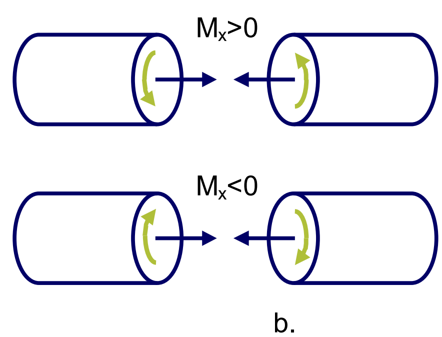
Thanh chịu xoắn thuần túy nếu nội lực trên tiết diện chỉ có một thánh phần là mô men nằm trong mặt phẳng tiết diện được gọi là mô men xoắn (hình 6.1a)

Ngoại lực gây xoắn thường là những mô men, những ngẫu lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh

Ta có quy ước dấu nếu nhìn vào mặt cắt đang xét mô men quay ngược chiều kim đồng hồ là mô men dương và ngược lại (hình 6.1.b). Lưu ý đây là quy ước nên có thể có những tài liệu sẽ quy ước khác với ở đây.

Trong các mục đầu ở đây chỉ xét xoắn thanh tiết diện hình tròn.





Hình 6.1. a. Mô men xoắn và b. Quy ước dấu

6.2 Biểu đồ mô men xoắn

Mô men xoắn M_x cũng được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Cắt một mặt cắt sau đó xét cân bằng mô men trên trục thanh của phần đang xét ta có độ lớn của mô men xoắn nội lực tại mặt cắt bằng tổng đại số tất cả các mô men ngoại lực (mô men tập trung M và mô men phân bố dọc theo trục thanh có cường độ m) tác dụng về một phía của mặt cắt. Công thức tổng quát

$$M_x = -\sum M - \sum \int_l m_x dx \qquad (6.1)$$

Quan hệ bước nhảy của mô men xoắn và mô men ngoại lực tập trung

$$M_{x,ph} - M_{x,tr} = M \tag{6.2}$$

Quan hệ vi phân giữa mô men xoắn và mô men xoắn ngoại lực phân bố dọc trục

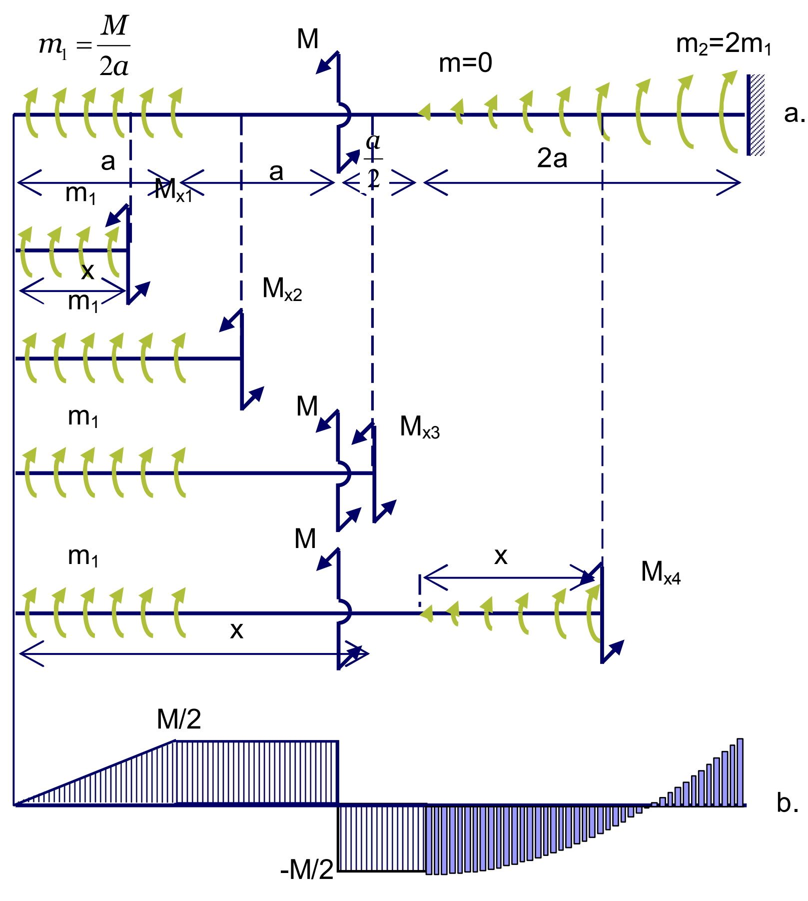
$$\frac{dM_x}{dx} = m_x \tag{6.3}$$

Ví dụ. Thanh chịu lực như trên hình 6.2a. Vẽ biểu đồ mômen xoắn.

– Xét mặt cắt với đoạn bên trái trong khoảng $0 < x < a$ ta có

$$M_{x1} - m_1 x = 0 \Rightarrow M_{x1} = \frac{M}{2a}x$$

suy ra tại $x = 0$, $M_{x1} = 0$ và tại $x = a$, $M_{\substack{x1\\x=a}} = \frac{M}{2}$



Hình 6.2. Ví dụ vẽ biểu đồ mô men xoắn

– Xét mặt cắt trong khoảng $a < x < 2a$ ta có

$$M_{x2} - m_1 a = 0 \Rightarrow M_{x2} = \frac{M}{2}$$

– Xét mặt cắt trong khoảng $2a < x < 2,5a$ ta có

$$M_{x3} - m_1 a + M = 0 \Rightarrow M_{x3} = -\frac{M}{2}$$

– Xét mặt cắt trong khoảng $2,5a < x < 4,5a$ ta có

$$M_{x4} - m_1 a + M - \int_0^{\xi} \frac{2m_1}{2a}\xi d\xi = 0 \Rightarrow M_{x4} = -\frac{M}{2} + \frac{M\xi^2}{4a^2} \quad \xi = [0,2a]$$

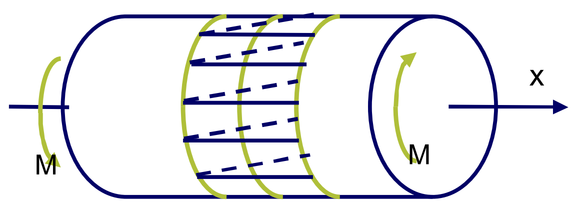
suy ra tại $\xi = 0$, $M_{x4} = -\frac{M}{2}$, $\xi = 2a$, $M_{\substack{x4\\x=a}} = \frac{M}{2}$ và $M_{x4} = 0$ khi $\xi = a\sqrt{2} = 1,42a$

Biểu đồ mô men xoắn có dạng như trên hình 6.2b

6.3 Ứng suất tiếp

6.3.1. Giả thiết về biến dạng

Xét thanh tiết diện tròn chịu xoắn. Kẻ các đường sinh và các đường tròn chu tuyến



Hình 6.3. Giả thiết về biến dạng khi thanh chịu xoắn

Cho thanh chịu mô men xoắn M ở hai đầu, với biến dạng bé đàn hồi ta có nhận xét

– Chiều dài thanh và khoảng cách giữa các đường tròn hầu như không đổi. Các góc vuông thay đổi

– Các đường tròn vẫn phẳng, bán kính không thay đổi. Mặt phẳng chứa các đường tròn xoay quanh trục, góc xoay của các vòng tròn khác nhau

Ta chấp nhận các giả thiết

– Thanh không có biến dạng dọc trục

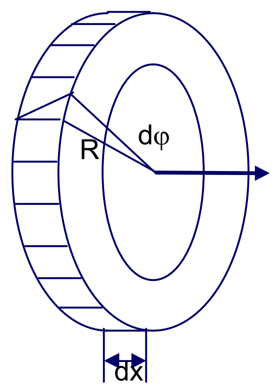
- Tiết diện thanh vẫn phẳng chỉ xoay đi một góc φ và góc xoay là hàm của tọa độ x (Lưu ý tiết diện không là hình tròn thì giả thiết này không phù hợp)
- Bán kính tiết diện vẫn thẳng và không thay đổi chiều dài
- Các lớp vật liệu dọc trục không tác dụng tương hỗ (bỏ qua ứng suất pháp trên các mặt song song với trục)

Theo các giả thiết trên, tại tiết diện chỉ tồn tại ứng suất tiếp các ứng suất pháp bằng không

6.3.2. Công thức ứng suất tiếp trên tiết diện

Khảo sát biến dạng của một phân tố thanh có chiều dài dx.

Tiết diện bên trái tại tọa độ x có góc quay là φ. Tiết diện bên phải tại tọa độ x+dx góc quay là $\varphi+d\varphi$. Bán kính của tiết diện bên phải cũng quay đi một góc là $d\varphi$. (Hình 6.4)



Hình 6.4. Biến dạng của phân tố thanh chịu xoắn

Xét phân tố trụ tròn bán kính ρ, góc xoắn của bán kính ρ cũng là $d\varphi$ (hình 6.5a).

Biến dạng góc vuông ở mặt bên của phân tố con. (Hình 6.5b)

$$\gamma = \frac{AB}{dx} = \rho\frac{d\varphi}{dx} = \rho\theta . \qquad (6.5)$$

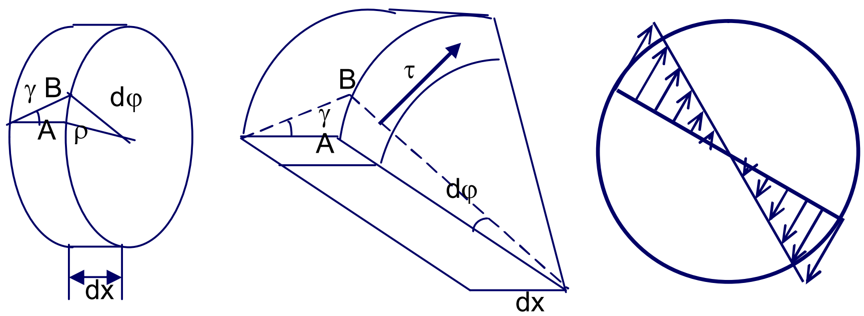
Trị số θ là góc xoắn tương đối giữa hai tiết diện cách nhau một đơn vị chiều dài

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} . \qquad (6.6)$$

Theo định luật Hook ứng suất tiếp quan hệ với góc quay tương đối bằng

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta \tag{6.7}$$

trong đó G mô dun đàn hồi trượt



Hình 6.5. Phân tố trụ tròn và biểu đồ ứng suất tiếp

Theo định nghĩa

$$M_x = \int_A \tau\rho dA = \int_A G\theta\rho^2 dA \tag{6.8}$$

Tích Gθ=const, vậy

$$G\theta = \frac{M_x}{\int_A \rho^2 dA} = \frac{M_x}{I_p} \tag{6.9}$$

trong đó $I_p = \int_A \rho^2 dA$ mô men quán tính độc cực của mặt cắt. Như vậy ứng suất tiếp biểu diễn qua mô men xoắn bằng công thức

$$\tau = \frac{M_x}{I_p}\rho \tag{6.10}$$

Từ biểu đồ ứng suất tiếp (hình 6.5c) ta có

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{I_p}R = \frac{M_x}{W_p} \tag{6.11}$$

trong đó $W_p = \dfrac{I_p}{R}$ mô men chống xoắn của mặt cắt.

Đối với tiết diện tròn bán kính R ta có

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32},\ W_p = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}.\ \text{trong đó } D = 2R \text{ đường kính} \tag{6.12}$$

Đối với tiết diện hình vành khăn bán kính ngoài R và bán kính trong r ta có

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}\left(1-\alpha^4\right) = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right),\ W_p = \frac{\pi R^3}{2}\left(1-\alpha^4\right) = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right) \tag{6.13}$$

trong đó $\alpha = r/R = d/D$, $d = 2r$.

6.4 Biến dạng và dịch chuyển

6.4.1. Biến dạng

Từ công thức (6.7) và (6.10) góc xoay tương đối của hai tiết diện cách nhau một đơn vị chiều dài bằng

$$\theta = \frac{M_x}{GI_p} \tag{6.14}$$

Từ 6.6) và (6.14) ta tính được góc xoay tương đối giữa hai tiết diện cách nhau dx chiều dài

$$d\varphi = \theta dx = \frac{M_x}{GI_p}dx \tag{6.15}$$

Tích phân (6.15) ta nhận được góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai đầu thanh độ dài L gọi là góc xoắn

$$\varphi = \int_L \theta dx = \int_L \frac{M_x}{GI_p}dx \tag{6.16}$$

Khi $\dfrac{M_x}{GI_p} = const$ trên cả chiều dài ta có

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p} \tag{6.17}$$

Khi $\dfrac{M_x}{GI_p} = const$ trên từng đoạn chiều dài L_i

$$\varphi = \sum_i \frac{M_x L_i}{GI_p} \tag{6.18}$$

Người ta gọi GI_p là độ cứng chống xoắn của thanh

6.4.2. Dịch chuyển

Góc xoắn φ xác định từ quan hệ vi phân (6.15)

$$d\varphi = \theta dx = \frac{M_x}{GI_p} dx$$

$$\varphi = \int_L \frac{M_x}{GI_p} dx + C \qquad (6.19)$$

trong đó C là hằng số tích phân xác định từ điều kiện liên kết

Ví dụ. Vẽ biểu đồ ứng suất tiếp ở mép ngoài tiết diện $\tau_{\max}$ và góc xoắn φ cho thanh tròn đường đinh d chịu lực như trên hình 6.7a

– Xét mặt cắt từ bên trái trong khoảng $0 < x < l$ ta có

$$M_{x1} = M = ml\,;\ \tau_{\max 1} = \frac{M_{x1}}{W_x} = \frac{16ml}{\pi d^3}$$

– Xét mặt cắt trong khoảng $l < x < 2{,}5l$ ta có

$$M_{x2} = M + 2M = 3ml\,;\ \tau_{\max 2} = \frac{M_{x2}}{W_x} = \frac{48ml}{\pi d^3}$$

– Xét mặt cắt trong khoảng $2{,}5l < x < 4{,}5l$ ta có

$$M_{x3} = M + 2M - 5M + m\xi = m(\xi - 2l) \quad \xi = [0{,}2l]$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{x3}}{W_x} = \frac{16m(\xi - 2l)}{\pi d^3} \quad \xi = [0{,}2l]$$

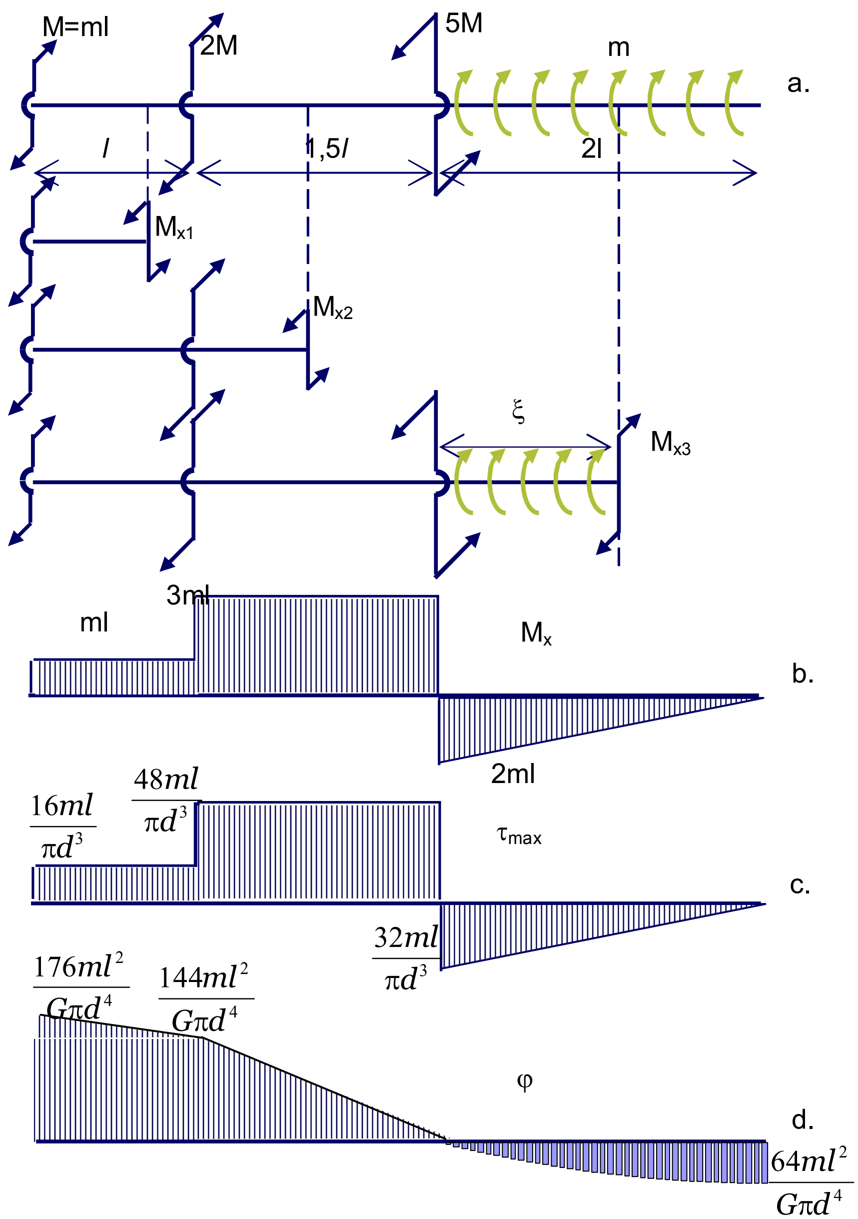
tại $\xi = 0$, $M_{x3} = -2ml$, $\tau_{\max 3} = \frac{M_{x3}}{W_x} = -\frac{32ml}{\pi d^3}$, $\xi = 2l$, $M_{x3} = 0$, $\tau_{\max 3} = \frac{M_{x3}}{W_x} = 0$. Ta có biểu đồ $\tau_{\max}$ như trên hình 6.7c

Hai đoạn đầu có $\frac{M_x}{GI_p} = const$ trên từng đoạn. Góc xoắn giữa tiết diện đầu và cuối đoạn I là

$$\varphi_I = \frac{M_{x1}L_1}{GI_p} = \frac{ml^2}{GI_p} = \frac{32ml^2}{G\pi d^4}$$

Góc xoắn giữa hai tiết diện đầu và cuối đoạn II là

$$\varphi_{II} = \frac{M_{x2}L_2}{GI_p} = \frac{4{,}5ml^2}{GI_p} = \frac{144ml^2}{G\pi d^4}$$



Hình 6.6. Ví dụ tính góc xoắn và ứng suất tiếp

Góc xoắn giữa hai tiết diện đầu và cuối đoạn III là

$$\varphi_{III} = \frac{m}{GI_p}\int_0^{2l}(\xi - 2l)d\xi = \frac{m}{GI_p}\left(\frac{\xi^2}{2} - 2l\xi\right)\Bigg|_0^{2l}$$

tại $\xi = 0$ ta có $\varphi_{III} = 0$, tại $\xi = 2l$ ta có $\varphi_{III} = \dfrac{M_{x1}L_1}{GI_p} = -\dfrac{2ml^2}{GI_p} = -\dfrac{64ml^2}{G\pi d^4}$.

Như vậy biểu đồ góc xoắn φ như trên hình 6.7d

6.4.3. Thế năng biến dạng đàn hồi

Từ công thức (3.2) trong chương 3 ta có thế năng biến dạng đàn hồi riêng của trang thái ứng suất khối tổng quát

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

Trong bài toán xoắn thuần túy thanh tiết diện tròn ta chỉ có ứng suất tiếp τ trên mặt cắt vuông góc với trục thanh, như vậy ứng suất chính của trạng thái ứng suất đang xét

$$\sigma_1 = \tau\,;\ \sigma_3 = -\tau\,;\ \sigma_2 = 0 \qquad (6.20)$$

Thay (6.20) vào biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi (3.2) ta được

$$u = \frac{1+\mu}{E}\tau^2 \qquad (6.21)$$

Thay biểu thức của ứng suất tiếp (6.10) vào (6.21) và lưu ý đến mô đun trượt $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ ta nhận được

$$u = \frac{1}{2G}\frac{M_x^2}{I_p^2}\rho^2 \qquad (6.22)$$

Công thức tổng quát tính thế năng đàn hồi tích lũy sẽ có dạng

$$U = \sum\int\frac{M_x^2}{2GI_p}dx \qquad (6.23)$$

6.5 Độ bền và độ cứng

6.5.1. Điều kiện bền

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \le [\tau] \qquad (6.24)$$

– Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \tag{6.25}$$

– Theo thuyết bền thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng cực đại

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \tag{6.26}$$

Như đã nói trong phần nhập môn ta có 3 bài toán cơ bản:

– Bài toán kiểm tra: ta kiểm tra điều kiện bền (6.24) xem có thỏa mãn không.

– Bài toán thiết kế: lựa chọn kích thước tiết diện từ điều kiện bền

$$W_p \geq \frac{\max|M_x|}{[\tau]} \tag{6.27}$$

– Bài toán xác định tải trọng cho phép M_b từ điều kiện (6.24) tính tải trọng cho phép tác động lên thanh sao cho đủ bền

6.5.2. Điều kiện cứng

$$\varphi_{\max} = \frac{\max|M_x| l_\varphi}{GI_p} \leq [\varphi] \tag{6.28}$$

Tương tự đối với từng bài toán

– Bài toán kiểm tra: ta kiểm tra điều kiện cứng (6.28) xem có thỏa mãn không.

– Bài toán thiết kế ta tính góc xoắn φ dựa trên kích thước tiết diện đã chọn từ điều kiện bền (6.24). Ta kiểm tra điểu kiện cứng (6.28), nếu thỏa mãn không cần chọn lại kích thước. Nếu điều kiện (6.28) không thỏa mãn ta lựa chọn lại kích thước theo tiêu chuẩn

$$I_\rho \geq \frac{\max|M_x| l_\varphi}{G[\varphi]} \tag{6.29}$$

trong đó l_φ là độ dài đoạn thanh người ta cho biết góc xoắn cho phép.

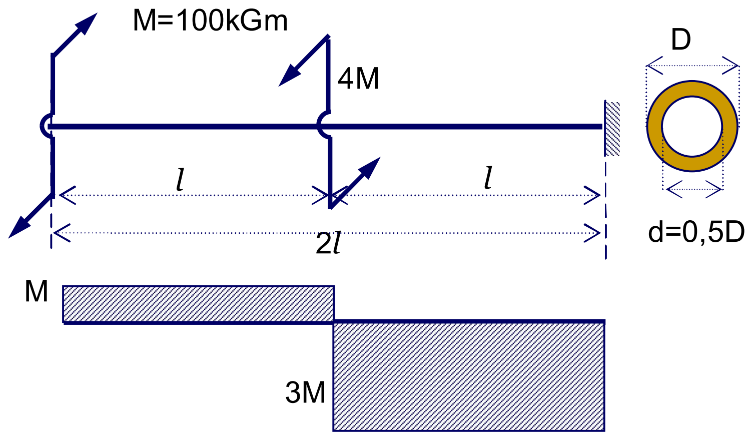
– Bài toán xác định tải trọng cho phép M_c từ điều kiện (6.28) tính tải trọng cho phép tác động lên thanh sao cho đủ cứng. Tải trọng cho phép M sẽ là $\max(M_b, M_c)$

Ví dụ. Thanh tiết diện hình vành khăn chịu xoắn như trên hình 6.7. Ứng suất tiếp cho phép $[\tau] = 500kG/cm^2$

– Bước 1. Vẽ biểu đồ moment xoắn

– Bước 2. Tìm τ_{max}

$$\tau_{max} = \frac{3M}{\frac{\pi D^3}{16}\left(1 - \frac{d^3}{D^3}\right)} = \frac{300 \cdot 16}{\pi D^3 (1 - 0{,}5^3)}$$



Hình 6.7

– Bước 3 Từ điều kiện bền (6.27) xác định đường kính ngoài D, theo thông số ban đầu tỉ lệ giữa đường kính trong và đường kính ngoài là 0,5

$$W_{max} = \frac{M_{max}}{[\tau]} \rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{M}{[\tau]\pi(1-\alpha^3)}} = \sqrt[3]{\frac{480000}{500\pi(1-0{,}5^4)}} = 6{,}88cm$$

– Bước 4 Kiểm tra điều kiện về độ cứng (6.28). Từ kích thước tìm được ta tính mô men quán tính

$$I = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) = 206{,}4cm^4$$

sau đó tính

$$\frac{M_{max} l_\rho}{G[\varphi]} = \frac{30000 \cdot 100 \cdot 180}{800000 \cdot 2 \cdot \pi} = 107{,}43cm^4$$

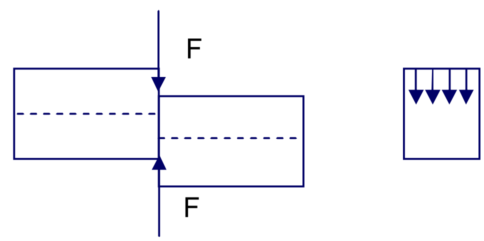
Ta thấy là điều kiện cứng thỏa mãn $I > \frac{M_{max} l_\rho}{G[\varphi]}$ suy ra ta chọn kính thước đã tính được ở bước 3

$$D = 6{,}88cm; \quad d = 3{,}44cm$$

6.6 Thanh chịu cắt

Biến dạng cắt hay biến dạng trượt là một trường hợp chịu lực của thanh mà trên tiết diện cũng chỉ có các ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp này có phương chiều của lực cắt F và phân bố đều trên diện tích A của mặt cắt (hình 6.8) ta có công thức tính ứng suất tiếp khi thanh chịu cắt

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{6.30}$$



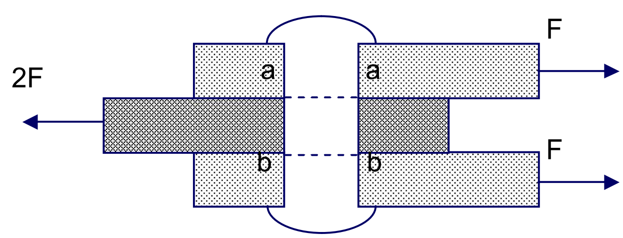
Hình 6.8. Thanh chịu cắt

Điều kiện bền khi cắt

$$\tau = \frac{F}{A} \le [\tau]$$

Điều kiện bền này để kiểm tra các liên kết: đinh tán, bu lông, mối hàn

Ví dụ: Xét đinh tán có đường kính d liên kết ba tấm phẳng (hình 6.9)



Hình 6.9. Đinh tán bu lông – kiểm tra biến dạng trượt

Liên kết của đinh tán ở hai mặt cắt a-a và b-b, tại đó đinh tán chịu lực cắt F trên diện tích

$$A = 2\pi d^2 / 4$$

Khi đinh tán có n mặt cắt thì

$$A = n\pi d^2 / 4 \tag{6.31}$$

Một dạng phá hủy khác của đinh tán do sự ép trên bề mặt tiếp xúc (hình 6.10). Sự phân bố ứng suất trên bề mặt tiếp xúc rất phức tạp. Đáng giá gần đúng thông qua trị số trung bình

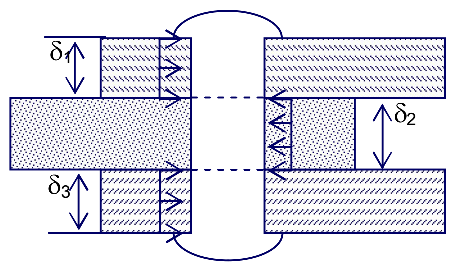
$$\sigma_{em} = \frac{F}{A_{em}} \le [\sigma]_{em} \tag{6.32}$$

trong đó:

F - tổng lực kéo về một phía

A_{em}- diện tích ép mặt quy ước

σ_{em}- ứng suất ép mặt quy ước.



Hình 6.10. Kiểm tra ứng suất ép tại các mặt tiếp xúc

Diện tích ép mặt quy ước được tính như sau:

– Giữa đinh tán và vách lỗ của tấm thứ hai, diên tích ép mặt quy ước bằng

$$A_{em} = d \cdot \delta_2$$

– Giữa đinh tán và vách lỗ của tấm thứ nhất và tấm thứ ba có diện tích ép mặt quy ước bằng

$$A_{em} = d(\delta_1 + \delta_3)$$

Tổng quát hóa diện tích ép mặt quy ước được tính bằng

$$A_{em} = \sum d\delta_i = d\sum \delta_i \tag{6.33}$$

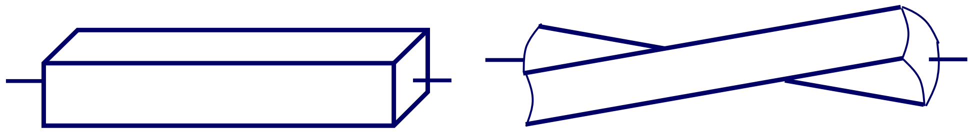
trong đó

d: đường kính lỗ đinh,

δ_i: bề dày tấm i.

6.7 Xoắn thanh tiết diện chữ nhật

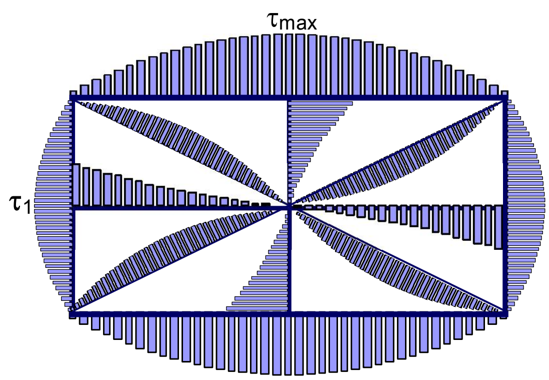
Khi thanh tiết diện hình chữ nhật chịu xoắn, thì mặt phẳng vuông góc với trục của thanh sẽ bị biến dạng vênh khỏi mặt phẳng ban đầu (hình 6.11)



Hình 6.11. Thanh chịu xoắn hình chữ nhất

Lúc này giả thiết về tiết diện phẳng không thỏa mãn, lời giải của bài toán xoắn thanh tiết diện hình chữ nhật đã được Saint-Venant giải dùng phương pháp nửa ngược. Theo Saint-Venant biểu đồ phân bố ứng suất tiếp của tiết diện hình chữ nhật khi thanh chịu xoắn có dạng như trên hình 6.12. Từ biểu đồ này có các nhận xét sau

– tại trung tâm ứng suất tiếp bằng không $\tau = 0$



Hình 6.12. Biểu đồ phân bố ứng suất trên tiết diện chữ nhật chịu xoắn

– tại trung điểm cạnh dài ứng suất tiếp có giá trị lớn nhất

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_x} \tag{6.34}$$

– tại trung điểm cạnh ngắn ứng suất tiếp tính qua ứng suất tiếp lớn nhất

$$\tau_1 = \beta \tau_{\max} \tag{6.35}$$

– góc xoắn trên một đơn vị dài

$$\theta = \frac{M_z}{GI_x} \tag{6.36}$$

trong đó

$$W_x = \alpha hb^2; \quad I_x = \gamma hb^3 \qquad (6.37)$$

Các giá trị α, β và γ phụ thuộc vào tỉ lệ giữa hai cạnh h và b của hình chữ nhật cho trong bảng 6.1

Bảng 6.1. Các hệ số α, β, γ theo tỉ số các cạnh h/b

h/b	1,0	1,5	1,75	2	2,5	3	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	0,339
β	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,743	0,742	0,742
γ	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	,0313	0,333

Khi tỉ số h/b≥10 có thể lấy $\alpha = \gamma =1/3=0,333$

6.8 Bài toán siêu tĩnh

Cũng như bài toán thanh chịu kéo hay nén đúng tâm, trong hệ siêu tĩnh chịu xoắn ta cũng phải tìm những điều kiện chập dịch chuyển (quan hệ hình học giữa các dịch chuyển) để bổ sung vào các phương trình cân bằng tĩnh học. Trong bài toán xoắn để lập các điều kiện chập ta xem xét các điều kiện liên kết, chúng có các dạng sau

– Thanh có hai đầu ngàm chặt: điều kiện chập dịch chuyển là tổng đại số các góc xoắn trên tất cả các đoạn thanh phải bằng không
– Thanh có một đầu liên kết đàn hồi thì góc xoay của đầu đàn hồi không bằng không mà tỉ lệ với độ lớn mô men phản lực
– Thanh có hai đầu liên kết đàn hồi thì góc xoắn toàn phần bằng hiệu góc xoay của hai mặt cắt ở hai đầu
– Khi trong hệ có một số thanh chịu xoắn, một số thanh chịu kéo (hay nén) thì dịch chuyển sẽ là góc xoắn đối với thanh chịu xoắn và là dịch chuyển dọc đối với thanh chịu kéo (hay nén)

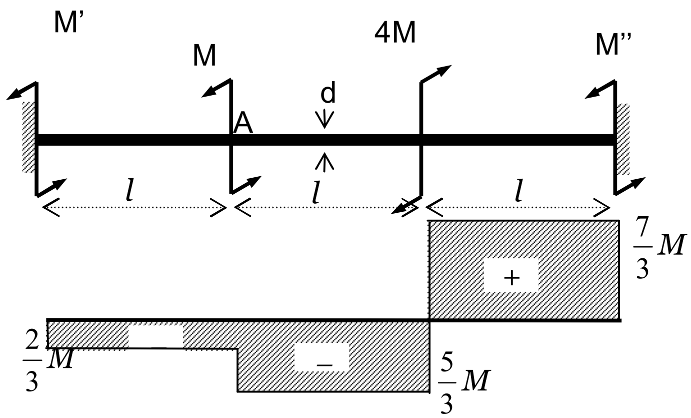
Ví dụ. Cho kết cấu như trên hình 6.13, biết l, M, d, G. Tìm τ_{max} và φ_A

Thanh chỉ chịu mô men xoắn, nên có thể thay thế ngàm bằng các mô men phản lực M' và M''. Từ điều kiện cân bằng ta có

$$M' + M'' + M - 4M = 0$$

Điều kiện chập dịch chuyển chính là tổng đại số góc xoắn của thanh bằng không.

$$\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = 0$$



Hình 6.13

Ta tính góc xoắn tương đối cho từng đoạn

$$\varphi_I = -\frac{M'l}{I_\rho G},\ \varphi_{IJ} = -\frac{(M'+M)l}{I_\rho G},\ \varphi_{III} = \frac{(4M - M' - M)l}{I_\rho G}$$

Thế vào điều kiện tổng đại số các góc xoắn bằng không

$$\frac{l}{I_\rho G}(-M' - M' - M - M' - M + 4M) = 0 \Rightarrow M' = \frac{2}{3}M$$

Từ điều kiện cân bằng ta tìm được M''

$$M' + M'' + M - 4M = 0 \Rightarrow M'' = \frac{7M}{3},$$

Như vậy cả hai phản lực đều có chiều như trên hình vẽ. Ứng suất tiếp lớn nhất ở đoạn thứ 3

$$\tau_{\max} = \frac{7M}{3W_\rho} = \frac{112M}{3\pi d^3}.$$

Góc xoắn tương đối tại điểm A

$$\varphi_A = \frac{2Ml}{3GI_\rho} = \frac{2Ml}{3\pi G}.$$

Kết luận chương 6

Chương sáu trình bày bài toán xoắn thanh tiết diện tròn. Với các giả thiết về biến dạng của thanh tiết diện tròn chịu xoắn ta có công thức tính ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp đạt cực đại ở mép ngoài của tiết diện.

Giới thiệu lời giải của bài toán Saint Venant cho thanh tiết diện chữ nhật chịu xoắn. Ứng suất tiếp lớn nhất ở điểm giữa của cạnh dài. Đưa ra bảng các hệ số phụ thuộc vào tỉ lệ giữa hai cạnh để tính toán cho thanh tiết diện chữ nhật chịu xoắn.

Bài toán thanh chịu cắt và ứng dụng trong kiểm tra bền cho các mối nối cũng được xem xét trong chương này.

Bài toán siêu tĩnh trong trường hợp thanh chịu xoắn được trình bày ngắn gọn. Hướng dẫn cách lập các điều kiện chập chuyển vj trong trường hợp thanh chịu xoắn.

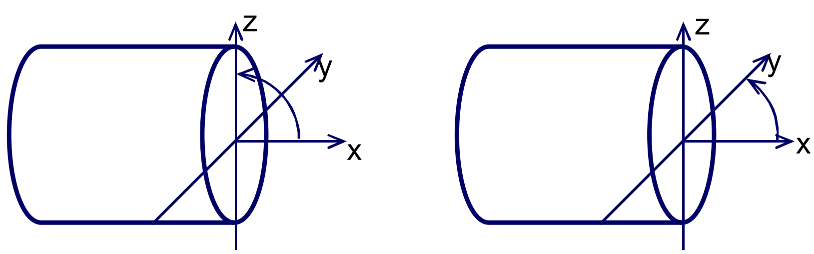
CHƯƠNG 7

Thanh thẳng chịu uốn

7.1 Định nghĩa

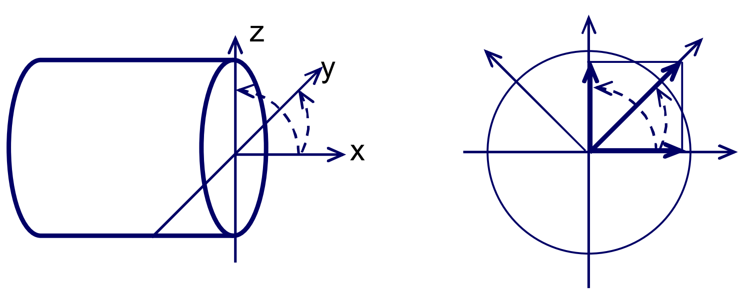
Thanh chịu uốn khi trục thanh thay đổi độ cong. Mặt phẳng uốn là mặt phẳng chứa trục thanh và mô men uốn. Mặt phẳng quán tính chính là mặt chứa trục thanh Ox và trục quán tính chính trung tâm y hoặc z

Nếu mặt phẳng uốn trùng với mặt phẳng quán tính chính ta có trường hợp thanh chịu uốn phẳng



Hình 7.1. Uốn phẳng

Nếu mặt phẳng uốn không trùng với mặt phẳng quán tính chính ta có trường hợp thanh chịu uốn không gian



Hình 7.2. Uốn không gian

Luôn luôn có thể phân tính mô men uốn $M_u = M_y + M_z$ trong hai mặt phẳng quán tính chính, như vậy uốn không gian là tổ hợp của uốn phẳng

Trường hợp thanh chịu uốn có cả lực cắt ta gọi là uốn ngang

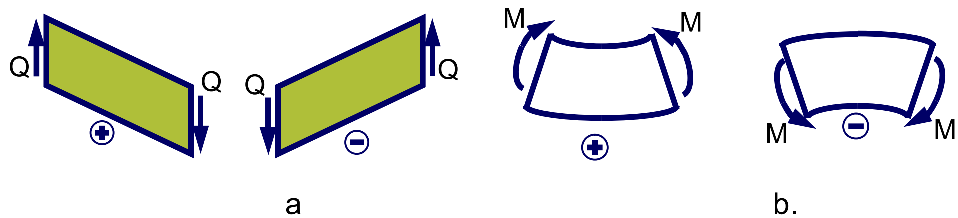
Trường hợp thanh chịu uốn không có lực cắt ta gọi là uốn thuần túy

7.2 Biểu đồ lực cắt và mô men uốn

Tương tự như lực dọc trục trong thanh chịu kéo, nén, mô men xoắn trong thanh chịu xoắn, lực cắt và mô men uốn trong bài toán uốn thanh cũng được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Lực cắt Q_y tại mặt cắt nào đó bằng tổng hình chiếu lên trục y của tất cả ngoại lực (lực tập trung và lực phân bố) tác dụng vào phần thanh ở về một bên của mặt cắt. Còn mô men uốn M_z tại mặt cắt đó bằng tổng đại số các mô men của tất cả những ngoại lực) tác dụng vào phần thanh ở về một bên của mặt cắt.

Quy tắc dấu của lực cắt và mô men uốn cho trên hình 7.3. Như đã nêu trong chương1

- Lực cắt Q vuông góc với tiếp tuyến của trục thanh, là dương khi đoạn ta xét có xu hướng quay theo chiều kim đồng hồ dưới tác động của lực cắt
- Mô men uốn M gây uốn trong mặt phẳng là dương khi đoạn ta xét bị cong võng xuống (hứng nước) dưới tác động của mô men



Hình 7.3. Quy ước dấu. a. Lực cắt và b. mô men uốn

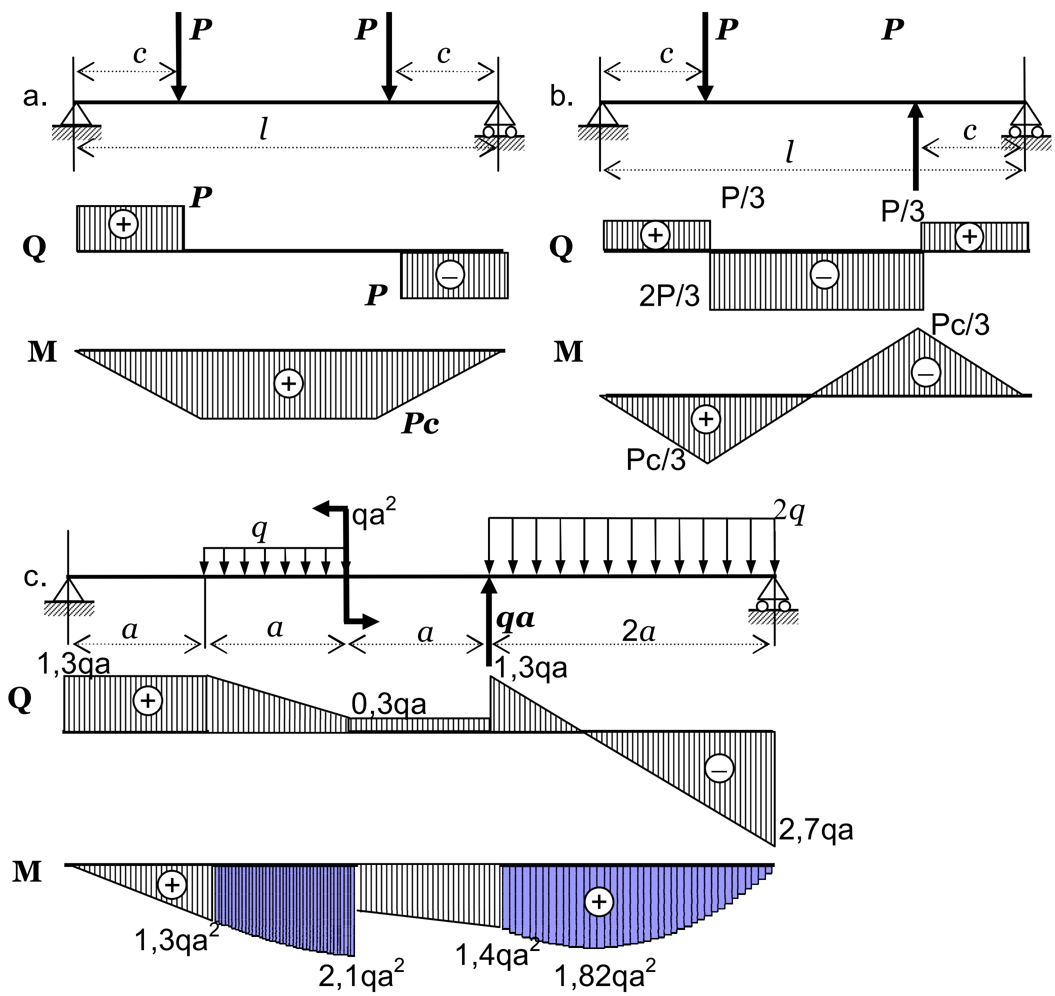
Khi vẽ biểu đồ nội lực ta nên vẽ biểu đồ lực cắt Q trước, biểu đồ mô men uốn M sau. Khi thanh không chịu ngẫu lực uốn phân bố ta có thể sử dụng quan hệ vi phân giữa nội lực và tải trọng (1.21)

$$Q = \frac{dM}{dx}; \quad q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$

trong đó q là mật độ tải trọng phân bố.

Từ quan hệ vi phân này ta có những nhận xét sau về biểu đồ nội lực Q và M

- Dầm có tải trọng đối xứng và liên kết đối xứng (hình 7.4a) biểu đồ lực cắt Q sẽ phản đối xứng, còn biểu đồ mô men M đối xứng. Ngược lại (hình 7.4b) khi dầm chịu tải phản đối xứng thì biểu đồ Q đối xứng, còn biểu đồ M phản đối xứng



Hình 7.4. Các ví dụ vẽ biểu đồ lực cắt và mô men uốn

- Tại ví trí có đặt lực tập trung, trên biểu đồ Q có bước nhảy mà độ lớn bằng với giá trị của lực tập trung. Tương tự tại ví trí đặt ngẫu lực uốn, biểu đồ mô men uốn M cũng có bước nhảy với độ lớn bằng giá trị của ngẫu lực
- Tang của góc giữa tiếp tuyến của biểu đồ mô men uốn M với trục thanh sẽ bằng lực cắt Q và cường đồ của tải phân bố bằng tăng của góc giữa tiếp tuyến của biểu đồ lực cắt Q với trục thanh
- Nếu trên một đoạn dầm tải trọng phân bố biến đổi theo hàm đại số, thì trên đoạn đó biểu đồ lực cắt biến đổi theo hàm cao hơn một bậc và mô men uốn biến đổi theo hàm cao hơn một bậc so với hàm của lực cắt. Biều đồ mô men của ví dụ

trên hình 7.4c cho ta thấy đoạn có lực phân bố đều, biểu đồ lực cắt là hàm bậc nhất, còn biểu đồ mô men là hàm bậc hai

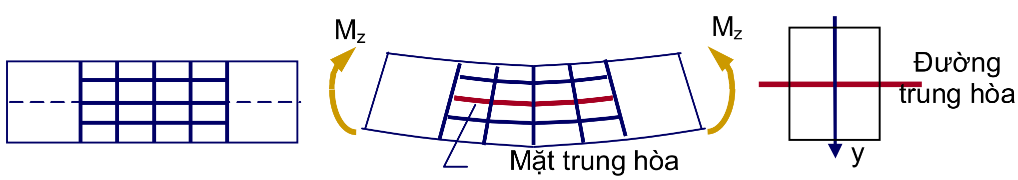
- Tại vị trí mà lực cắt có gía trị bằng không thì mô men uốn có giá trị cực trị. Trong đoạn ngoài cùng bên phải của thanh trong ví dụ 7.4c biểu đồ lực cắt bằng không tai điểm cách gối 1,35a. Tại điểm này biểu đồ mô men đạt cực trị
- Tại ví trí lực cắt có bước nhảy đổi dấu thì biểu đồ mô men uốn thay đổi độ dốc, như biểu đồ mô men của trường hợp b trên hình 7.4. Nếu lực cắt có bước nhảy nhưng không đổi dấu thì biểu đồ mô men uốn bị gãy. Ví dụ trên hình 7.4c tại điểm đặt lực tập trung qa biểu đồ lực cắt có bước nhẩy nhưng không đổi dấu do vậy biểu đồ mô men bị gãy khúc ở đó
- Nếu xét mặt cắt từ phải sang trái thì $Q = -\dfrac{dM}{dx}$.

7.3 Ứng suất trong bài toán uốn

7.3.1 Uốn thuần túy

Các giả thiết

Xét thanh thẳng chịu uốn thuần túy trong mặt phẳng quán tính chính



Hình 7.5. Các giả thiết thanh uốn thuần túy

Quan sát biến dạng ta có nhận xét

- Những đường kẻ vuông góc với trục thanh vẫn thẳng
- Các đường kẻ song song với trục bị cong,các đường phía trên co lại, các đường phía dưới dãn ra nhưng vẫn cách đều
- Các góc vuông vẫn bảo toàn

Trên cơ sở đó ta giả thiết

- Trước và sau biến dạng tiết diện thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục

– Các lớp vật liệu dọc trục thanh không tác dụng tương hỗ lên nhau, có thể bỏ qua ứng suất pháp trên các mặt cắt song song với trục thanh $\sigma_z \approx \sigma_y \approx 0$

– Tồn tại lớp vật liệu song song với trục thanh có chiều dài không đổi gọi là lớp trung hòa. Giao tuyến của lớp trung hòa với tiết diện là một đường thẳng gọi là đường trung hòa

Hai giả thiết đầu giống trong bài toán thanh chịu kéo và thanh chịu xoắn. Giả thiết thứ ba là giả thiết về sự chấp nhận biến dạng bé.

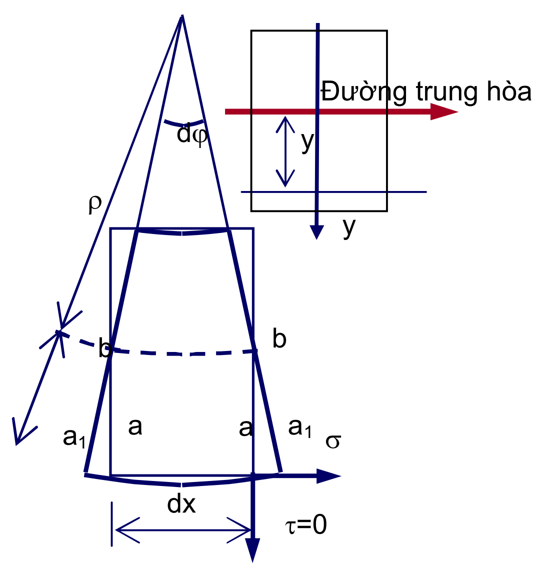
Công thức tính ứng suất

Xét phân tố có chiều dài dx

– $d\varphi$ góc giữa hai tiết diện

– ρ bán kính cong của lớp trung hòa

– z - đường trung hòa trên tiết diện



Hình 7.6. Phân tố chịu uốn

Biến dạng tỉ đối theo phương x

$$\varepsilon_x = \frac{a_1a_1 - aa}{aa} = \frac{a_1a_1 - bb}{bb} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

Các góc vuông không đổi nên ứng suất tiếp trên tiết diện đang xét bằng không, vì $\sigma_z \approx \sigma_y \approx 0$ nên ứng suất pháp

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{Ey}{\rho} \tag{7.1}$$

Khi chịu uốn trong mặt phẳng xy chỉ tồn tại mô men uốn Mz còn lực dọc N và momnet uốn My bằng không

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0; \quad M_y = \int_A z\sigma_x dA = 0; \quad M_z = \int_A y\sigma_x dA$$

Thay biểu thức của σ_x chú ý $\frac{E}{\rho} = const$ ta có:

$$\int_A ydA = 0; \quad \int_A zydA = 0$$

Mô men tĩnh đối với trục trung hòa và mô men quán tính ly tâm với hệ trục yz của tiết diện bằng không. Suy ra trục trung hòa z là trục đi qua trọng tâm vuông góc với mặt phẳng uốn, hệ trục yz là hệ trục quán tính chính

Khi xác định vị trí của trục trung hòa, ta tìm được biểu thức của bán kính cong

$$M_z = \int_A y\sigma dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{EI_z}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \tag{7.2}$$

Ta có biểu thức để tính ứng suất pháp

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho} = \frac{M_z}{I_z} y \tag{7.3}$$

Dấu của mô men: mô men dương làm căng phía dưới của thanh, mô men âm làm căng phía trên của thanh

Biểu đồ, trị số lớn nhất của ứng suất pháp

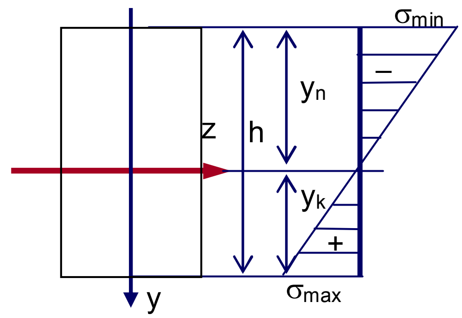
Ứng suất pháp tỉ lệ với khoảng cách đến trục trung hòa. Biểu đồ là đường bậc nhất bằng không tại trục trung hòa và có trị số lớn nhất tại hai mép

Ký hiệu y_k và y_n - tọa độ của mép tiết diện chịu kéo và chịu nén, thì

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{M_z}{I_z} y_{\substack{k\\ n}} = \pm \frac{|M_z|}{W_{\substack{z,k\\ z,n}}} \tag{7.4}$$

trong đó

$$W_{z,k} = \frac{I_z}{y_k}; \quad W_{z,n} = \frac{I_z}{y_n} \text{ là các mô men chống uốn} \tag{7.5}$$



Hình 7.7. Biểu đồ ứng suất pháp

Nếu tiết diện đối xứng qua trục z và có chiều cao là h thì

$$W_{z,k} = W_{z,n} = W_z = \frac{I_z}{h/2} \tag{7.6}$$

và

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \pm \frac{|M_z|}{W_z} \tag{7.7}$$

Đối với tiết diện hình chữ nhật

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \ W_z = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \tag{7.8}$$

Đối với tiết diện hình tròn đặc bán kính R, đường kính $D = 2R$

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}, \ W_z = \frac{\pi R^4}{4R} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{12} \tag{7.9}$$

Đối với tiết diện hình vành khăn đường kính ngoài là D, đường kính trong d

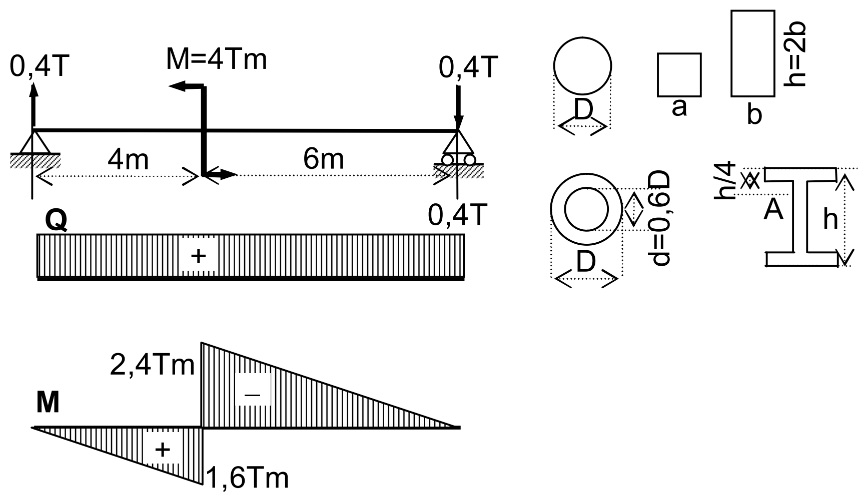
$$I_z = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4); \quad \alpha = \frac{d}{D}, \ W_z = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4) \tag{7.10}$$

Ví dụ. Cho thanh chịu uốn như trên hình 7.8. Tính kích thước của mặt căt hình tròn, hình vành khăn, hình vuông, hình chữ nhật và thép hình chữ I. Tính ứng suất tại điểm A của mặt cắt chữ I tại ví trí đặt mô men tập trung. Cho $[\sigma] = 1600 kG/cm^2$

Tính phản lực hai đầu $R_1 = R_2 = 0{,}4T$ có giá trị bằng nhau nhưng ngược hướng với nhau.

Vẽ biểu đồ mô men uốn như trên hình 7.8. Tìm được $|M|_{\max} = 2{,}4 \cdot 10^3 \cdot 10^2\, kGcm$

Ta tìm kích thước từ điều kiện bền với $W = \dfrac{M}{[\sigma]} = \dfrac{240000}{1600} = 150 cm^3$



Hình 7.8

– Đối với hình tròn ta có công thức tính mô men chống uốn

$$W = \frac{\pi D^3}{32} = 150 \Rightarrow D = \sqrt[3]{32 \cdot 150 / \pi} = 11{,}518 cm \quad A = 104{,}188 cm^2$$

– Đối với hình vuông ta có công thức tính mô men chống uốn

$$W = \frac{a^3}{6} = 150 \Rightarrow a = \sqrt[3]{6 \cdot 150} = 9{,}655 cm \quad A = a^2 = 93{,}217 cm^2$$

– Đối với hình chữ nhật ta có công thức tính mô men chống uốn

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3} = 150 \Rightarrow b = \sqrt[3]{3 \cdot 150 / 2} = 6{,}082 cm \quad h = 12{,}164 cm \quad A = 73{,}986 cm^2$$

– Đối với hình vành khăn ta có công thức tính mô men chống uốn

$$W = \frac{\pi D^3}{32}\left(1 - \alpha^4\right) = 150$$

$$\Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 150}{\pi\left(1 - 0.6^2\right)}} = 12{,}063cm \quad d = 7{,}238cm \quad A = 73{,}145cm^2$$

– Đối với tiết diện chữ I ta chọn thép hình số hiệu 18a từ phụ lục 1 theo TCVN 1655-75

$$W = 159cm^3 \quad h = 180mm \quad b = 100mm \quad d = 5{,}1mm \quad t = 8{,}3mm \quad A = 25{,}4cm^2$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{240000}{159} = 1509{,}43kG/cm^2$$

Nếu lấy diện tích hình tròn là 1 ta có tỉ lệ giữa các diện tích như sau

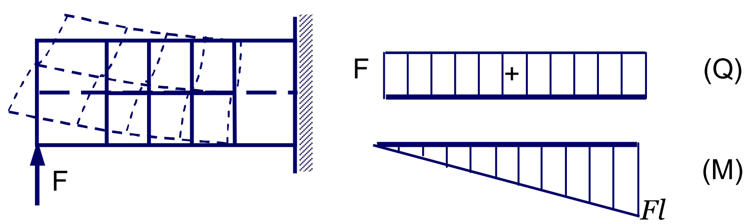
$A_{tròn} : A_{vuông} : A_{chữ\ nhật} : A_{vành\ khăn} : A_I = 1 : 0{,}89 : 0{,}71 : 0{,}70 : 0{,}24$

Ta thấy với cùng một mô men chống uốn, thì tiết diện chữ I có diện tích chỉ bằng khoảng 1/4 so với tiết diện hình tròn. Ta có thể kết luận là thép hình chữ I có khả năng chống uốn tốt nhất.

7.3.2 Uốn ngang phẳng

Các giả thiết

Xét thanh thẳng chịu uốn nganh phẳng, có lực cắt Q_y, mô men uốn M_z (hình 7.9). Quan sát biến dạng ta có nhận xét đường kẻ vuông góc với trục không thẳng và các góc vuông cũng bị thay đổi.



Hình 7.9. Giả thiết trong bài toán uốn phẳng

Giả thiết tiết diện phẳng không còn đúng, tồn tại cả ứng suất tiếp và ứng suất pháp Biến dạng trượt do ứng suất tiếp gây ra không thay đổi chiều dài theo phương ngang trục và phương dọc trục nên ứng suất pháp vẫn được tính theo công thức

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y$$

trong đó y là khoảng cách đến trục trung hòa

Để tính ứng suất tiếp do lực cắt gây ra ta xét một phân tố thanh chiều dài dx. Giả thiết chiều rộng nhỏ hơn chiều cao (tiết diện hẹp) ta có thể chấp nhận

– ứng suất tiếp phân bố đều trên tiết diện theo bề rộng

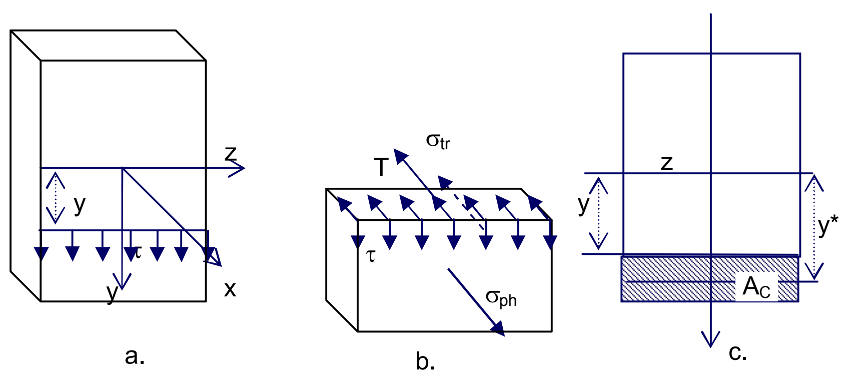
– ứng suất tiếp chỉ có thành phần thẳng đứng theo phương lực cắt

Hai giả thiết này chỉ đúng khi xét tiết diện hình chữ nhật hẹp. Ta xét cân bằng của phân tố trên hình 7.10b. Lực tác động lên phân tố gồm có

– ứng suất pháp tại mặt bên trái $\sigma_{tr} = \dfrac{M_z}{I_z} y^*$

– ứng suất pháp tại mặt bên phải $\sigma_{ph} = \dfrac{M_z + dM_z}{I_z} y^*$

– ứng suất tiếp τ phân bố trên bề mặt có diện tích là bdx



Hình 7.10. Ứng suất tiếp do lực cắt

Phương trình cân bằng của phân tố có dạng

$$\int_{A_c} \sigma_{ph} dA - \int_{A_c} \sigma_{tr} dA - \tau \cdot bdx = \int_{A_c} (\sigma_{ph} - \sigma_{tr}) dA - \tau \cdot bdx = 0$$

Thay biểu thức của ứng suất tại hai mặt cắt trái và phải ta có

$$\sigma_{ph} - \sigma_{tr} = \frac{M_z + dM_z}{I_z} y^* - \frac{M_z}{I_z} y^* = \frac{dM_z}{I_z} y^*$$

Như vậy ta nhận được công thức tính ứng suất tiếp

$$\tau = \frac{1}{bdx} \int_{A_C} \frac{dM_z}{I_z} y^* dA = \frac{dM_z}{dx} \frac{1}{bI_z} \int_{A_C} y^* dA = \frac{dM_z}{dx} \frac{S_Z^C}{bI_z}$$

Từ quan hệ vi phân giữa mô men và lực cắt ta có công thức tính ứng suất tiếp do lực cắt gây ra tại khoảng cách y^* so với trục trung hòa

$$\tau = \frac{Q_y S_Z^C}{bI_z} \text{ - công thức D. J. Juravski} \tag{7.11}$$

trong đó

Q_y là lực cắt tác dụng lên thanh

b là bề rộng thực của tiệt diện tại đểm tính phân bố ứng suất tiếp

$S_Z^C = \int_{A_C} y^* dA = A_C \overline{y}_C$ là mô men tĩnh của phần tiết diện giới hạn bởi bề rộng thực b đi qua điểm tính ứng suất tiếp. Có thể tính bằng cách nhân diện tích của phần tiết diện đang xét với trọng tâm của nó.

Chú ý ta vẫn có thể sử dụng công thức (7.11) cho các tiết diện không hẹp.

Đối với tiết diện hình chữ nhật có kích thước hxb

Mô men quán tính đối với trục z có dạng

$$I_z = \frac{bh^3}{12},$$

Mô men quán tính tĩnh của phần tiết diện giới hạn bởi bề rộng của điểm cách trục trung hòa một đoạn y

$$S_z^C = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Công thức ứng suất tiếp cho điểm nằm cách trục trung hòa một đoạn y (hình 7.11a)

$$\tau_y = \frac{12Q_y}{bh^3 b}\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{6Q_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{7.12}$$

Tại trục trung hòa khi $y = 0$ ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất (hình 7.11a)

$$\tau_{y\max} = \frac{3Q_y}{2bh}; \tag{7.13}$$

Tại mép ngoài của tiết diện khi $y = h/2$ (hình 7.11a)

$$\tau_y = 0$$

Đối với tiết diện hình tròn bán kính R

Mô men quán tính đối với trục z có dạng

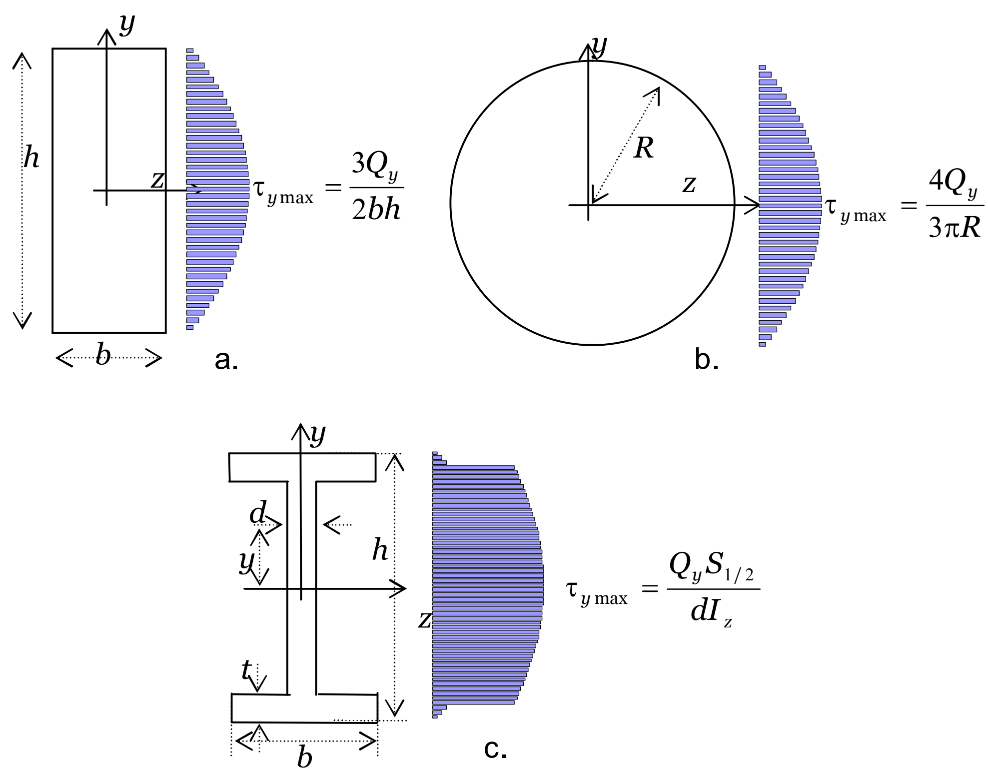
$$I_z = \frac{\pi R^4}{4},$$

Bề rộng thực của tiết diện tại điểm tính phân bố ứng suất tiếp

$$b = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

Mô men quán tính tĩnh của phần tiết diện giới hạn bởi bề rộng của điểm cách trục trung hòa một đoạn y

$$S_z^C = \frac{2}{3}\left(R^2 - y^2\right)^{3/2}$$



Hình 7.11. Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện hình chữ nhật và hình tròn

Công thức ứng suất tiếp cho điểm nằm cách trục trung hòa một đoạn y (hình 7.11b)

$$\tau_y = \frac{4Q_y}{\pi R^4 2\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{2}{3}\left(R^2 - y^2\right)^{3/2} = \frac{4Q_y}{3\pi R^4}\left(R^2 - y^2\right) \qquad (7.14)$$

Tại trục trung hòa khi $y = 0$ ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất (hình 7.11b)

$$\tau_{y\max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} \qquad (7.15)$$

Tại mép ngoài của tiết diện khi $y = R$ (hình 7.11b)

$$\tau_y = 0$$

Đối với tiết diện hình chữ I

Ta coi tiết diện là hình ghép của hai hình chữ nhật hẹp ngang gọi là bản cánh và một hình chứ nhật hẹp thẳng gọi là bản bụng. Kí hiệu $S_{1/2}$ là mô men tĩnh của một nửa diện tích (thường được cho trong các bảng thép hình kí hiệu là S_x).

Đối với các điểm trên bản bụng cách trục z một đoạn y có mô men tính bằng $S_{1/2}$ trừ đi mô men tĩnh của diện tích dxy

$$S_z^C = S_{1/2} - \frac{dy^2}{2}, \; \tau_y = \frac{Q_y}{dI_z}\left(S_{1/2} - \frac{d \cdot y^2}{2}\right)$$

Ứng suất tiếp cực đại đạt được tại y=0

$$\tau_{y\max} = \frac{Q_y S_{1/2}}{dI_z}$$

Tại điểm trên bản bụng giáp với bản cánh $y = \frac{h}{2} - t$

$$\tau_y = \frac{Q_y}{dI_z}\left(S_{1/2} - \frac{d}{2}\left(\frac{h}{2} - t\right)^2\right)$$

Tại điểm trên bản cánh giáp với bản bụng ta có $y = \frac{h}{2} - t$

$$\tau_y = \frac{Q_y}{bI_z}\left(S_{1/2} - \frac{d}{2}\left(\frac{h}{2} - t\right)^2\right)$$

Biểu đồ ứng suất tiếp của tiết diện hình chữ I xem trên hình 7.11c

Đối với tiết diện dạng thành mỏng

Ứng suất tiếp hướng theo tiếp tuyến với đường trung bình và phân bố đều trên bề dày. Ta có công thức tính ứng suất tiếp

$$\tau_y = \frac{Q_y S}{lI} \tag{7.16}$$

trong đó l là bề dày của mặt cắt, S là mô men tĩnh đối với đường trung hòa của phần mặt cắt ở về một phía của đường vẽ vuông góc với đường trung bình tại điểm đang xét.

Ví dụ. Ta có thể tính ứng suất tiếp cực trị tại mặt cắt bên phải của điểm đặt mô men tập trung trong ví dụ trên hình 7.8 cho các loại tiết diện khác nhau. Trong trường hợp này lực cắt không đổi trên toàn bộ độ dài thanh $Q = 0{,}4T$, ta có

– Đối với tiết diện hình tròn

$$\tau_{y\max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4\cdot 400}{3\cdot\pi\cdot 11{,}518^2} \approx 1{,}28 kG/cm^2$$

– Đối với tiết diện hình vuông

$$\tau_{y\max} = \frac{3Q_y}{2a^2} = \frac{3\cdot 400}{2\cdot 9{,}655^2} \approx 6{,}436 kG/cm^2$$

– Đối với tiết diện hình chữ nhật

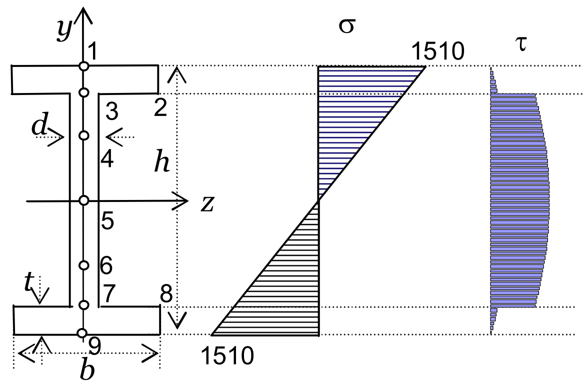
$$\tau_{y\max} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3Q_y}{4b^2} = \frac{3\cdot 400}{4\cdot 6{,}082^2} \approx 8{,}11 kG/cm^2$$

– Đối với tiết diện chữ I số hiệu 18a $W_z = 159cm^3$, $I_z = 1430cm^4$, $S_{1/2} = 89{,}8cm^3$,

$h = 18cm, b = 10cm, d = 0{,}51cm, t = 0{,}83cm, A = 25{,}4cm^2$

$$\tau_{y\max} = \frac{Q_y S_{1/2}}{dI_z} = \frac{400\cdot 89{,}8}{0{,}51\cdot 1430} = 49{,}25 kG/cm^2$$

Ta tính các ứng suất cho tiết diện chữ I số hiệu 18a với các thông số ở trên tại các điểm 1-9 đã chỉ ra trên hình



Hình 7.12

Bảng 7.1

	y cm	σ kG/cm^2	τ kG/cm^2	σ_1 kG/cm^2	σ_3 kG/cm^2	$\tau_{\max/\min}$ kG/cm^2
1	9	1510,49	0	1510,49	0	±755,5
2	8,17	1371,19	2,04	1371,19	-0,003	±685,6
3	8,17	1371,19	39,92	1372,35	-1,16	±686,76
4	4,5	755,24	46,42	758,09	-2,84	±380,46
5	0	0	49,25	49,25	-49,25	±49,25
6	-4,5	-755,24	46,42	2,84	-758,09	±380,46
7	-8,17	-1371,19	39,92	1,16	-1372,35	±686,76
8	-8,17	-1371,19	2,04	0,003	-1371,19	±685,6
9	-9	-1510,49	0	0	-1510,49	±755,5

7.3.3 Thế năng biến dạng đàn hồi của dầm chịu uốn

Biểu thức tổng quát thế năng biến dạng đàn hồi riêng (3.2) có dạng

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$$

Trạng thái ứng suất phẳng của dầm chịu uốn ngang phẳng gồm hai thành phần

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z}y\,,\ \ \tau = \frac{Q_y S_Z^C}{bI_z}$$

Ta tính ứng suất chính theo công thức (2.13)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \qquad (7.20)$$

Thay vào biểu thức (3.2) ta nhận được

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma^2 + 2(1+\mu)\tau^2\right] = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau}{2G} \qquad (7.21)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi tổng quát nhận được bằng tích phân thế năng biến dạng đàn hồi riêng *u* trên toàn bộ thể tích

$$U = \int_V udV = \int_V \left(\frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau}{2G}\right)dV = \int_l dx \int_A \left(\frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau}{2G}\right)dA$$

$$= \int_l dx \int_A \frac{M^2}{2EI^2} y^2 dA + \int_l dx \int_A \frac{Q^2}{2GI^2} \frac{S_x^{c^2}}{b^2} dA$$

$$U = \int_l \frac{M^2}{2EI} dx + \int_l \frac{kQ^2}{2GA} dx \text{ trong đó } k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S_x^{(1/2)}}{b^2} dA \qquad (7.22)$$

7.4 Biến dạng và dịch chuyển của thanh chịu uốn

Biến dạng của thanh chịu uốn (gọi là dầm) là sự thay đổi độ cong của trục thanh. Đường cong trục thanh chịu uốn là đường đàn hồi. Khi bỏ quả ảnh hưởng của lực cắt phương trình đường đàn hồi có dạng

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$$

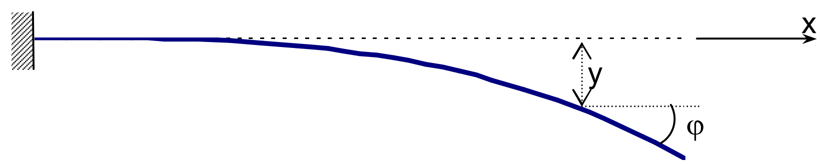
Dịch chuyển, độ võng và góc xoay

- Dịch chuyển gồm dịch chuyển thẳng của trọng tâm và dịch chuyển xoay của tiết diện
- dịch chuyển thẳng vuông góc với trục gọi là độ võng y

$$y = y(x)$$

- dịch chuyển xoay là góc xoay φ

$$tg\varphi = \frac{dy}{dx} = y'$$



Hình 7.13

Phương trình vi phân độ võng

Từ toán học cao cấp ta có phương trình vi phân của độ cong của đường cong phẳng:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}$$

Dấu ± lấy tùy thuộc hệ tọa độ sao cho bán kính độ võng luôn dương. Kết hợp với (7.3) ta có phương trình vi phân của độ võng

$$\frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} = \pm \frac{M_z}{EI_z}$$

Theo quy ước dấu của mô men uốn: mô men uốn dương làm trục dầm võng xuống và mô men uốn âm làm trục dầm lồi lên. Như vậy dấu của mô men uốn và độ võng luôn trái nhau nên khi xét biến dạng nhỏ bỏ qua các thành phần bậc cao ta có phương trình vi phân độ võng

$$y'' = -\frac{M_z}{EI_z} \tag{7.23}$$

trong đó EI_z là độ cứng chống uốn của tiết diện (uốn trong mặt phẳng xy).

Phương pháp tích phân không xác định

Từ phương trình vi phân độ võng (7.23) ta tích phân một lần được góc xoay

$$\varphi = y' = -\int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1, \tag{7.24}$$

tích phân lần thứ hai ta được độ võng

$$y = -\int \left[\int \frac{M_z}{EI_z} dx \right] dx + C_1 x + C_2, \tag{7.25}$$

trong đó hằng số tích phân C_1 và C_2 xác định từ điều kiện biên.

– Dầm gối tựa đơn giản ta có điều kiện độ võng ở hai đầu bằng không:

$$\varphi_{x=0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0 \text{ và } \varphi_{x=l} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l} = 0$$

– Dầm công son ta có điều kiện độ võng và góc xoay của đầu ngàm bằng 0:

$$y_{x=0} = 0 \text{ và } \varphi_{x=0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

Phương pháp tải trọng giả tạo

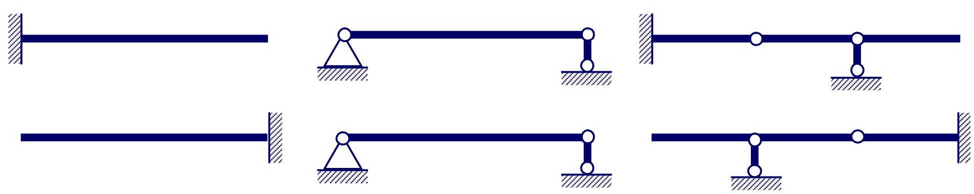
Ta có hai liên hệ cùng dạng

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI} \tag{7.26}$$

Như vây ta có thể tìm độ võng và góc xoay từ biểu đồ mô men và lực cắt vẽ bằng phương pháp mặt cắt cho dầm giả tạo chịu tải trọng phân bố có cường độ là M/EI. Khi đó ta có mỗi quan hệ

$$y = M_{gt}; \quad \varphi = Q_{gt}; \quad -\frac{M}{EI} = q_{gt} \tag{7.27}$$

Lập dầm giả tạo theo sơ đồ trên hình (7.13)



a.

b.

Hình 7.14. Sơ đồ dầm giả tạo (b.) ứng với dầm thực (a.)

Sau đó xác định nội lực M_{gt} và Q_{gt} trên dầm giả tạo chiu tải phân bố M/EI. Xác định độ võng, góc xoay cho dầm giả tạo theo công thức

$y = M_{gt}$, $\varphi = Q_{gt}$.

Phương pháp thông số ban đầu

Thông số ban đầu là độ võng y_0 và góc xoay φ_0 của mắt cắt ngang ở gốc tọa độ. Hợp lí nhất ta chọn gốc tọa độ là trọng tâm của mặt cắt ở đầu bên trái của dầm.

Phương trình xác định độ võng y_x và góc xoay φ_x ở mặt cắt cách gốc tọa độ một khoảng x có dạng

$$EIy_x = EIy_0 + EI\varphi_0 \frac{x}{1!} + \sum M \frac{(x-a_m)^2}{2!} + \sum Q \frac{(x-a_Q)^3}{3!}$$
$$+ \sum q_{a_q} \frac{(x-a_q)^4}{4!} - \sum q_{b_q} \frac{(x-b_q)^4}{4!} + \sum q'_{a_q} \frac{(x-a_q)^5}{5!} - \sum q'_{b_q} \frac{(x-b_q)^5}{5!} \Lambda \tag{7.28}$$

$$EI\varphi_x = EI\varphi_0 + \sum M \frac{(x-a_m)}{1!} + \sum Q \frac{(x-a_Q)^2}{2!}$$
$$+ \sum q_{a_q} \frac{(x-a_q)^3}{3!} - \sum q_{b_q} \frac{(x-b_q)^3}{3!} + \sum q'_{a_q} \frac{(x-a_q)^4}{4!} - \sum q'_{b_q} \frac{(x-b_q)^5}{4!} \Lambda \tag{7.29}$$

trong đó

E là mô dun đàn hồi Young,

I là mô men quán tính tiết diện đối với trục trung hòa z,

M – mô men của ngẫu lực ngoại lực,

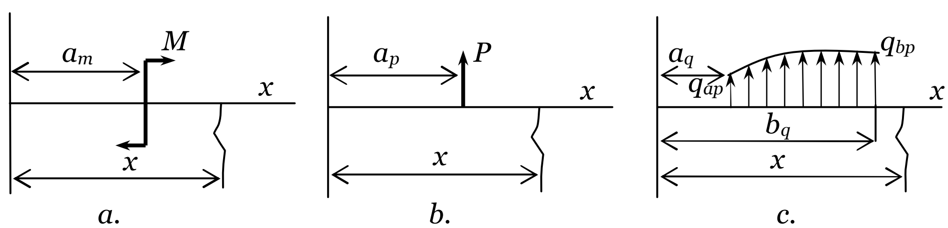
a_m - tọa độ của ví trị đặt ngẫu lực M,

P – lực ngang tập trung (gồm cả phản lực),

a_P - tọa độ của ví trị đặt lực P,

q_{aq}, q'_{aq} - giá trị của lực phân bố q_y và đạo hàm của nó theo x tại $x = a_q$ (mặt cắt bắt đầu đoạn lực phân bố),

q_{bq}, q'_{bq} - giá trị của lực phân bố q_y và đạo hàm của nó theo x tại $x = b_q$ (mặt cắt kết thúc đoạn lực phân bố)



Hình 7.15. Giải thích các kí hiệu trong công thức tính độ võng và góc xoay bằng phương pháp thông số ban đầu

Ví dụ. Cho q=4kN/m, P=4kN, E=2.10^{8}kN/m^2, [σ]=160.10^{3}kN/m^2,.

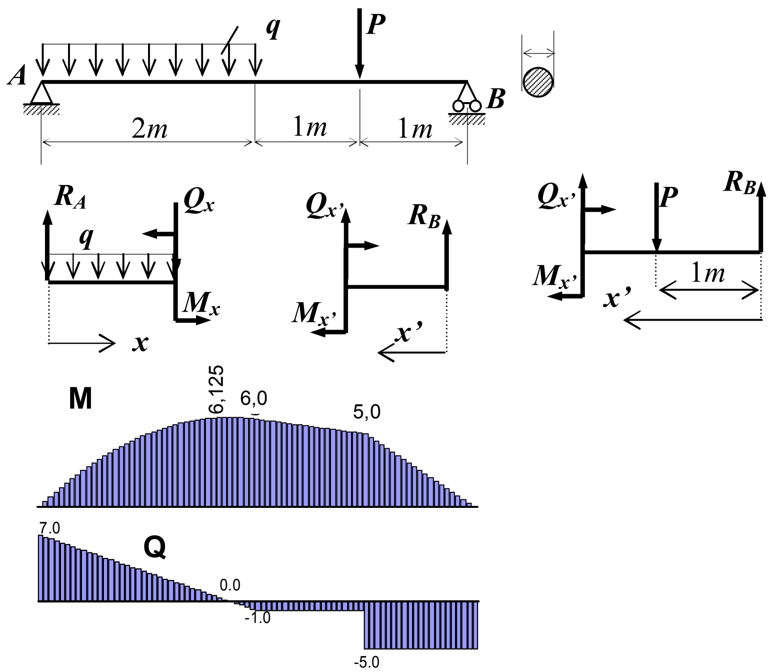
Chọn kích thước mặt cắt ngang thỏa mãn điều kiện về độ bền ứng suất pháp và tính dịch chuyển tại điểm giữa dầm.

Giải

- Xác định phản lực tại 2 gối R_A và R_B từ các phương trình cân bằng:

$$\sum M_A = 4R_B - 3P - q\frac{2^2}{2} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3P}{4} + \frac{q}{2} = 3 + 2 = 5kN$$

$$\sum F = R_A + R_B - P - 2q = 0 \Rightarrow R_A = 2q + P - R_B = 8 + 4 - 5 = 7kN$$



Hình 7.15

- Vẽ biểu đồ Q và M

- Xét đoạn bên trái $2 \ge x \ge 0$: Cân bằng nội lực trong đoạn đang xét ta có

$$Q_x + qx - R_A = 0 \Rightarrow Q_x = R_A - qx = 7 - 4x$$

$$M_x - R_A x + q\frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow M_x = R_A x - q\frac{x^2}{2} = 7x - 2x^2$$

$$x = 0 \Rightarrow Q_x = 7kN; \quad M_{x=0} = 0;$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_x = -1kN; \quad M_{x=2} = 6kNm$$

$$Q_x = 0 \quad khi \quad x = 7/4 = 1{,}75m, \quad M_{x=1,75} = 6{,}125kNm$$

- Xét đoạn bên phải $2 \ge x' \ge 0$ sẽ chia làm 2 đoạn:
  + Đoạn $1 \ge x' \ge 0$ Cân bằng nội lực trong đoạn đang xét ta có

$$Q_{x'} + R_B = 0 \Rightarrow Q_{x'} = -R_B = -5kN$$
$$M_{x'} - R_b x' = 0 \Rightarrow M_{x'} = R_B x' = 5x'$$

$$x' = 0 \Rightarrow M_{x'=0} = 0;$$
$$x' = 1 \Rightarrow M_{x'=1} = 5kNm$$

+ Đoạn 2 ≥ x’ ≥ 1

$$Q_{x'} + R_B - P = 0 \Rightarrow Q_{x'} = P - R_B = 4 - 5 = -1kN$$
$$M_{x'} - R_B x' + P(x'-1) = 0 \Rightarrow M_{x'} = (R_B - P)x' + P = x' + 4$$

$$x' = 1 \Rightarrow M_{x'} = 5kNm;$$
$$x' = 2 \Rightarrow M_{x'} = 6kNm$$

Biểu đồ M và Q. Moment cực đại tại điểm lực cắt bằng 0 x=1,75 M_{max}=6,125kNm

- Tìm kích thước của mặt cắt ngang từ điều kiện bền theo ứng suất pháp

$$W = \frac{M_{max}}{[\sigma]} \Rightarrow \frac{\pi D^3}{32} = \frac{M_{max}}{[\sigma]} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{32M_{max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 6{,}125}{\pi\cdot 160\cdot 10^3}} = 0{,}073057m = 7{,}3057cm$$

- Tính độ võng f tại điểm giữa dầm.

Với A là điểm gốc, với điều kiện biên độ võng tại A bằng 0 ta có biểu thức

$$EIf(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{EI\theta_A x + R_A\frac{x^3}{6} - q\frac{x^4}{24}}_{2\ge x\ge 0} + q\frac{(x-2)^4}{24}}_{3\ge x>2} - P\frac{(x-3)^3}{6}}_{4\ge x>3}$$

Từ điều kiện độ võng ở B bằng 0, ta tìm được góc xoay tại A

$$EIf(4) = EI\theta_A 4 + R_A\frac{4^3}{6} - q\frac{4^4}{24} + q\frac{2^4}{24} - P\frac{1^3}{6} = 0$$

$$\Rightarrow EI\theta_A = \left[4\frac{1}{6} + \frac{4\cdot 2^4}{24}\left(2^4 - 1\right) - 7\frac{4^3}{6}\right]\frac{1}{4} = \frac{1 + 4\cdot 15 - 7\cdot 16}{6} = -\frac{51}{6} = -8{,}5$$

Phương trình xác định độ võng trên dầm có dạng

$$EIf(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{-\frac{51}{6}x + 7\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6}}_{2\geq x\geq 0} + \frac{(x-2)^4}{6}}_{3\geq x>2} - 4\frac{(x-3)^3}{6}}_{4\geq x>3}$$

tại x=2: $EIf(x) = \frac{1}{6}\left(-51\cdot 2 + 7\cdot 2^3 - 2^4\right) = \frac{-51+7\cdot 4-8}{3} = -\frac{31}{3} = 10{,}33kNm^3$

Độ võng $f_{li2} = \frac{-31}{3EI} = \frac{-31}{3\cdot 279{,}6715} = -0{,}036948m$

7.5 Độ bền và độ cứng

7.5.1 Điều kiện bền khi uốn thuần túy

Khi uốn thuần túy trạng thái ứng suất là trạng thái đơn, nên từ (7.4) đối với mặt cắt không đối xứng ta có

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{I_z} y_k \leq [\sigma]_k$$

$$|\sigma_{\min}| = \frac{|M_z|}{I_z} y_n \leq [\sigma]_n \qquad (7.30)$$

trong đó y_k và y_n là khoảng cách từ đường trung hòa đến thớ bị kéo và thớ bị nén xa nhất

Kiểm tra cho các mặt cắt có trị số mô men dương và mô men âm lớn nhất

Khi tiết diện đối xứng qua trục z thì

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma]_{\substack{k\\ n}} \qquad (7.31)$$

Đối với vật liệu dẻo khi $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$ thì ta kiểm tra

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma] \qquad (7.32)$$

Trong bài toán thiết kế từ điều kiện bền ta lựa chọn kích thước thích hợp cho tiết diện ngang theo công thức

$$W = \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} \qquad (7.33)$$

trong đó $W = I/|y_{\max}|$ - mô men chống uốn của tiết diện ngang đối với đường trung hòa,

7.5.2 Dạng tiết diện hợp lý

Dạng tiết diện hợp lý là dạng tận dụng hết khả năng làm việc của vật liệu. Ta xét dạng hợp lý từ hai khía cạnh

– Khi hai mép cùng đồng thời phá hỏng

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_k = [\sigma]_k$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_z}{I_z} y_n = [\sigma]_n \qquad (7.34)$$

$$\frac{|y_k|}{|y_n|} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} = \frac{W_{zk}}{W_{zn}} = \alpha \le 1 \qquad (7.35)$$

Ta nhận được điều kiên hợp lý

Vật liệu dòn α<1 $\rightarrow$ $y_k < y_n$ tiết diện không đối xứng qua trục z

Vật liệu dẻo α=1 $\rightarrow$ $y_k = y_n$ tiết diện đối xứng qua trục z

– Xem xét điều kiện tiết kiệm. Như ta thấy độ bền chông uôn phụ thuộc vào mô men chống uốn W_z, (tăng mô men chống uốn W_z để giảm ứng suất pháp). Trong khi đó trọng lượng của thanh lại tỉ lệ với diện tích nên ta đánh giá mức độ tiết kiệm bằng tỉ số $\xi = W / A^{3/2}$ được gọi là mô men chống uốn riêng. Ví dụ hình hộp chứ nhật, hình ống, chữ U và chữ I là những dạng hợp lý. Ví dụ cùng diện tích nhưng thép chữ I có mô men chống uốn lớn hơn tám lần tiết diện hình vuông.

7.5.3 Ứng suất chính và kiểm tra độ bền tổng thể của dầm

Trong bài toán uốn ngang phẳng ta kiểm tra độ bền cho các trạng thái sau

– Trạng thái ứng suất đơn như bài toán uốn thuần túy

$$\left|\sigma_{\substack{\max\\ \min}}\right| = \frac{|M_z|}{I_z}\left|y_{\substack{k\\ n}}\right|_{\max} \le [\sigma]_n^k, \quad \left|\sigma_{\substack{\max\\ \min}}\right| = \frac{|M_z|}{\mathrm{W}_z} \le [\sigma]_n^k$$

– Trạng thái ứng suất trượt thuần túy

$$\left|\tau_0\right| = \frac{Q_y S_x^{(1/2)}}{I_z b} \leq [\tau] \qquad (7.36)$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$

Theo thuyết bền thế năng biến dạng hình dáng cực đại $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$

– Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt với

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y\,,\ \tau = \frac{Q_y S_x^C}{I_z b}$$

Từ công thức (2.13) ta tính ứng suất chính cho ở dạng công thức (7.20)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}\,,\ \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}\,,\ \tau_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Điều kiện bền theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Điều kiện bền theo thế năng biến dạng hình dáng cực đại

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Ví dụ. Với trường hợp ví dụ trên hình 7.15, ta kiểm tra điều kiện về độ cứng $\left[\frac{f_{l/2}}{l}\right] = \frac{1}{400}$

- Ta tính moment quán tính

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 32 \cdot 6{,}125}{64 \cdot \pi \cdot 160 \cdot 10^3} \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6{,}125}{\pi \cdot 160 \cdot 10^3}} = \frac{6{,}125 \cdot 0{,}073057}{32 \cdot 10^4} = 1{,}398 \cdot 10^{-6} m^4$$

$$\Rightarrow EI = 279{,}6715 kNm^2$$

- Kiểm tra điều kiện về độ cứng:

$$\frac{\left|f_{l/2}\right|}{l} = \frac{0{,}036948}{4} = 0{,}009237 > \frac{1}{400} = 0{,}0025$$

Điều kiện độ cứng không thỏa mãn

- Ta sẽ tính lại kích thước từ điều kiện độ cứng

- Từ điều kiện độ cứng, ta tính độ võng

$$\left|f_{l/2}\right| = \frac{l}{400} = \frac{4}{400} = 0{,}01$$

- Bên cạnh đó từ sơ đồ đặt lực ta có

$$x = 2 \to EI\left|f\right| = \frac{31}{3} \Rightarrow I = \frac{31}{3E\left[f_{l/2}\right]}$$

suy ra

$$D = \sqrt[4]{\frac{31\cdot 64}{3\pi E\left[f_{l/2}\right]}} = \sqrt[4]{\frac{31\cdot 64}{3\pi\cdot 2\cdot 10^{8}\cdot 0{,}01}} \approx 0{,}1013m = 10{,}13cm$$

Kết luận chương 7

Chương bảy xem xét bài toán uốn thanh thuần túy và uốn ngang.

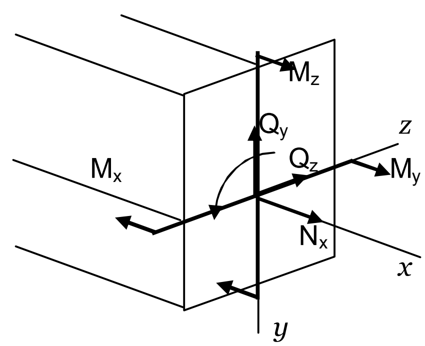
Bài toán siêu tĩnh cho dầm chịu uốn sẽ được xem xét kĩ trong phần 2 Cơ học kết cấu trong chương 10. Phương pháp lực.

CHƯƠNG 8
Thanh chịu lực phức tạp

8.1 Giới thiệu chung

Chương 5 đến chương 7 ta xem xét các bài toán thanh chịu lực đơn giản: thanh chịu kéo (hoặc nén), thanh chịu xoắn, thanh chịu cắt, thanh chịu uốn. Trong những bài toán này trên tiết diện thanh chỉ tồn tại một thành phần nội lực độc lập: lực dọc trục, mô men xoắn, mô men uốn đi với lực cắt. Ngoại lực cũng chỉ có từng loại riêng biệt: lực tác dụng dọc trục thanh F_x, ngẫu ngoại lực M_x nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh, lực ngang F_y và ngẫu lực mô men M_z (uốn trong mặt phẳng xy) hay lực ngang F_z và ngẫu lực mô men My (uốn trong mặt phẳng (xz).

Chương 8 xem xét các trường hợp chịu lực phức tạp. Tổng quát nhất là khi trên tiết diện thanh có đầy đủ sáu thành phần nội lực (hình 8.1)



Hình 8.1. Thanh chịu lực tổng quát

Đó là lực dọc N_x, mô men xoắn M_x, lực cắt Q_y và mô men uốn M_z (uốn trong mặt phẳng xy), lực cắt Q_z và mô men uốn M_y (uốn trong mặt phẳng xz).

8.2 Trường hợp tổng quát

Ta sẽ tính ứng suất và biến dạng trên tiết diện khi chịu lực tổng quát theo nguyên lý cộng tác dụng từ lời giải của các bài toán chịu lực đơn giản.

8.2.1 Công thức tính ứng suất pháp

Từ các bài toán thanh chịu lực đơn giản ta thấy ứng suất pháp chỉ do lực dọc và các mô men uốn gây ra

$$\sigma = \sigma(N) + \sigma(M_z) + \sigma(M_y)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z \tag{8.1}$$

8.2.2 Đường trung hòa

Định nghĩa. Đường trung hòa của tiết diện là quỹ tích của những điểm có ứng suất pháp bằng không.

Từ định nghĩa trên và công thức tính ứng suất pháp (8.1) ta có phương trình của đường trung hòa

$$\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z = 0 \tag{8.2}$$

Phương trình 8.2 là phương trình đường thẳng trên tiết diện mà ta đang xét. Trong đó N, M_z, M_y là nội lực, A, I_z, I_y là các đặc trưng hình học.

Tính chất của đường trung hòa

- Khi lực dọc trục bằng không đường trung hòa đi qua gốc tọa độ.
- Ứng suất pháp tại một điểm P trên tiết diện tỉ lệ bậc nhất với khoảng cách từ điểm đó đến đường trung hòa

$$\sigma_P = Kd \tag{8.3}$$

trong đó

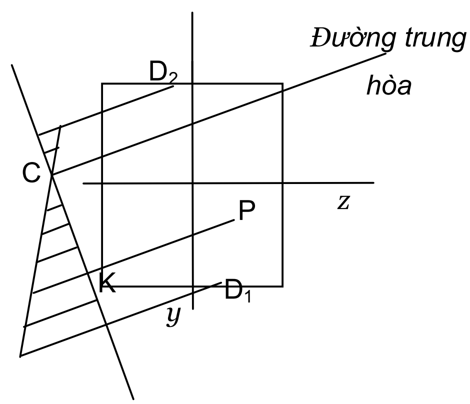
$$K = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{M_z}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{I_y}\right)^2}} \tag{8.4}$$

- Những điểm có ứng suất pháp như nhau là những điểm nằm trên đường song song với trục trung hòa. Tại điểm cách xa đường trung hòa nhất ứng suất pháp đạt cực đại

8.2.3 Biểu đồ ứng suất pháp

Từ tính chất của đường trung hòa ta có biểu đồ ứng suất pháp như trên hình 8.2 bằng các bước sau

- Kẻ đường vuông góc với trục trung hòa gọi là đường chuẩn tại điểm C
- Từ điểm P thuộc tiết diện kẻ đường song song với đường trung hòa và cắt đường chuẩn tại K.
- Tính ứng suất pháp σ_P tại P theo công thức (8.1).
- Từ K đặt tung độ bằng σ_P và nối với điểm C. Biểu đồ ứng suất pháp giới hạn bằng hai đường song song với đường trung hòa và tiếp xúc với chu vi tiết diện tại hai điểm cách xa đường trung hòa nhất (hình 8.2)



Hình 8.2. Biểu đồ ứng suất pháp

Ta có biểu thức của ứng suất pháp cực trị

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_D + \frac{M_y}{I_y} z_D \tag{8.5}$$

Ta đặt y_D và z_D tại các điểm (D_1 và D_2) rồi tính các giá trị cực trị

Đối với tiết diện hình chữ nhật và chữ I

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{|M_z|}{W_z} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \tag{8.6}$$

Đối với tiết diện hình tròn

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{|M_u|}{W_u} = \frac{N}{A} \pm \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z} \tag{8.7}$$

8.2.4 Điều kiện bền theo ứng suất pháp

Nếu chỉ kể đến ứng suất pháp ta có điều kiện bền

$$\left|\sigma_{\substack{\max\\ \min}}\right| \le [\sigma]_n^k \tag{8.8}$$

Trường hợp tổng quát

$$\left|\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_D + \frac{M_y}{I_y} z_D\right| \le [\sigma]_n^k \tag{8.9}$$

Đối với tiết diện hình chữ nhật và chữ I

$$\left|\frac{N}{A} \pm \frac{|M_z|}{W_z} \pm \frac{|M_y|}{W_y}\right| \le [\sigma]_n^k \tag{8.10}$$

Đối với tiết diện hình tròn

$$\left|\frac{N}{A} \pm \frac{\left|\sqrt{M_z^2 + M_y^2}\right|}{W_z}\right| \le [\sigma]_n^k \tag{8.11}$$

8.2.5 Ứng suất tiếp.

Ứng suất tiếp chỉ do mô men xoắn và các lực cắt gây ra

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(M_x) + \vec{\tau}(Q_y) + \vec{\tau}(Q_z) \tag{8.12}$$

Các thành phần ứng suất tiếp do lực cắt có phương chiều trùng với lực cắt gồm

$$\vec{\tau}(Q_y) = \frac{\vec{Q}_y S_z^C}{I_z b} \tag{8.13}$$

$$\vec{\tau}(Q_y) = \frac{\vec{Q}_z S_y^C}{I_y h} \tag{8.14}$$

Còn ứng suất tiếp do mô men xoắn có phương chiều phụ thuộc vào dạng tiết diện. Đối với tiết diện tròn, ứng suất tiếp có phương vuông góc với bán kính tiết diện, chiều theo chiều mô men xoắn

$$\tau = \frac{M_x}{I_p}\rho \qquad (8.15)$$

8.2.6 Độ võng

Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, ta tìm độ võng f do mô men uốn gây ra

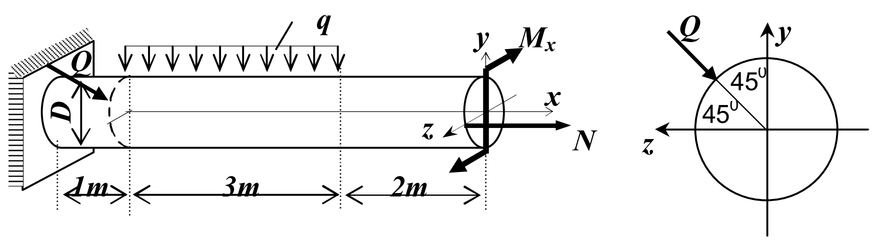
$$\vec{f} = \vec{f}_z + \vec{f}_y \text{, hay } f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} \qquad (8.16)$$

trong đó f_z, f_y độ võng do mô men uốn M_z, M_y gây ra.

Các dịch chuyển thành phần tìm từ phương trình vi phân độ võng

$$f_z'' = -\frac{M_z}{EI_z} \text{ và } f_y'' = -\frac{M_y}{EI_y}$$

Ví dụ. Cho D = 0,1m, $Q = 2\sqrt{2}$ kN; N = 6,28kN; q_y = 1kN/m, M_x = 3,14kNm; E=2.10^{8}kN/m^2, [σ] = 160.10^{3}kN/m^2. Kiểm tra độ bền thanh tại mặt cắt ngàm theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại (bỏ qua ứng suất tiếp do lực cắt).



Hình 8.3.

- Đề kiểm tra bền ta tính ứng suất tương đương tại điểm ngàm.
- Ứng suất pháp σ gồm các thành phần do lực dọc trục, lực cắt và lực phân bố
  + Từ lực dọc trục N đặt lệch tâm với điểm đặt (y_N=0, z_N=D/2) là ta có công thức tính ứng suất cho tiết diện hình tròn

$$\sigma_{\max N} = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{\sqrt{y_N^2 + z_N^2}}{W/F}\right) = \frac{4N}{\pi D^2}\left(1 + \frac{8\sqrt{(D/2)^2}}{D}\right)$$

$$= \frac{4 \cdot 6{,}28}{3{,}14 \cdot 0{,}1^2}(1+4) = 4000 kN/m^2$$

  + Từ các lực căt và lực phân bố ta tính được moment uốn M_y và M_z tại đầu A

$$M_z = 1 \cdot Q \cdot \cos 45^0 + q \cdot 3 \cdot 2{,}5 = 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/2 + 1 \cdot 3 \cdot 2{,}5 = 9{,}5kN$$

$$M_y = Q \cdot \sin 45^0 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/2 = 2kNm$$

Ta có ứng suất pháp do moment uốn M_y và M_z cho tiết diện hình tròn

$$\sigma_{\max} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W} = \frac{32\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{\pi D^3} = \frac{32\sqrt{9{,}5^2 + 2^2}}{3{,}14 \cdot 0{,}1^3} = 98887{,}6kN/m^2$$

Vậy ứng suất pháp lớn nhất của tiết diện tại đầu A là

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max N} + \sigma_{\max M} = 4000 + 98887{,}6 = 102887{,}6kN/m^2$$

– Bỏ qua ứng suất tiếp do lực cắt ta còn ứng suất tiếp do mo men xoắn M_x gây ra

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{16M_x}{\pi D^3} = \frac{16 \cdot 3{,}14}{3{,}14 \cdot 0{,}1^3} = 16000kN/m^2$$

– Tính ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại

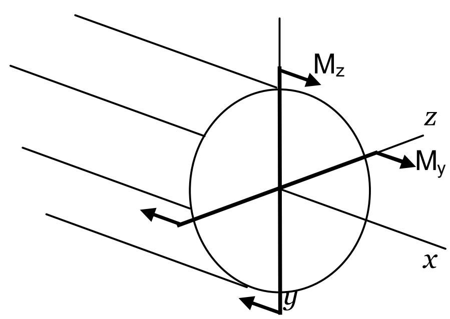
$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{102887{,}6^2 + 4 \cdot 16000^2} = 107748{,}8kN/m^2$$

Kết cấu đủ bền vì $\sigma_{td} = 107748{,}8kN/m^2 < [\sigma] = 160 \cdot 10^3 kN/m^2$

8.3 Các trường hợp chịu lực phức tạp

8.3.1 Uốn xiên

Nếu bỏ qua lực cắt nội lực trong tiết diện sẽ gồm các mô men uốn M_z và M_y (hình 8.4)



Hình 8.4. Thanh chịu uốn xiên

Biểu thức ứng suất pháp có dạng

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \tag{8.17}$$

Nếu tiết diện tròn

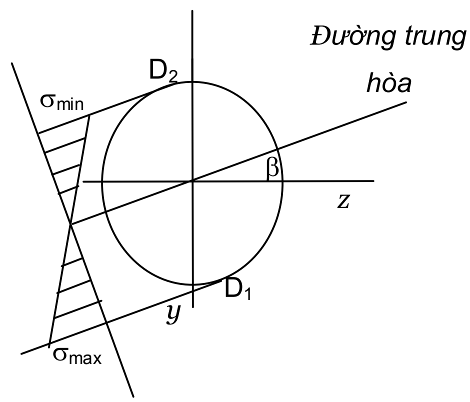
$$\sigma = \frac{\left|\sqrt{M_z^2 + M_y^2}\right|}{W_z} \tag{8.18}$$

Phương trình đường trung hòa

$$y = -\frac{I_z}{I_y}\frac{M_y}{M_z}z = -ztg\beta,$$

trong đó

$$tg\beta = \frac{I_z}{I_y}\frac{M_y}{M_z}$$



Hình 8.5. Biểu đồ ứng suất pháp khi uốn xiên

Kiểm tra bền theo công thức (8.10)

$$\frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma]^k, \; -\frac{|M_z|}{W_z} - \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma]_n \tag{8.19}$$

Thiết kế kích thước theo phương pháp thử bằng cách lựa chọn từ công thức

$$W_z \ge \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]}$$

trong đó $c = \dfrac{W_z}{W_y}$.

Độ võng tính theo công thức (8.16)

$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}$ và $\varphi = \sqrt{\varphi_z^2 + \varphi_y^2}$

trong đó f_z, f_y, φ_z, φ_y độ võng và góc xoay do mô men uốn M_z, M_y gây ra.

8.3.2 Kéo (nén) và uốn đồng thời

Biểu thức ứng suất pháp có dạng

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{M_z}{Ni_z^2} y + \frac{M_y}{Ni_y^2} z\right) \tag{8.20}$$

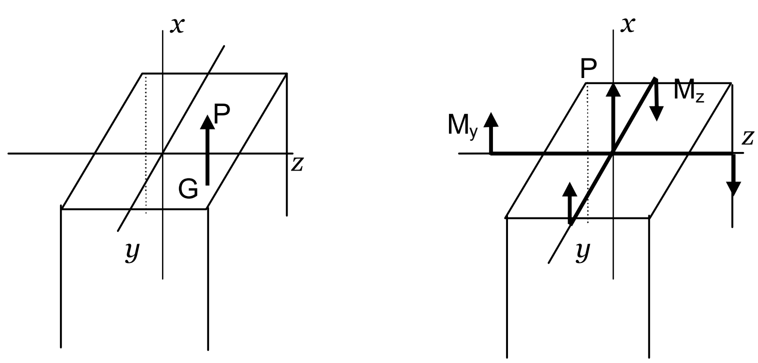
trong đó i_z, i_y bán kính quán tính chính

Phương trình đường trung hòa

$$1 + \frac{M_z}{Ni_z^2} y + \frac{M_y}{Ni_y^2} z = 0, \tag{8.21}$$

Ứng suất pháp cực đại tính theo (8.5-8.7). Kiểm tra bền theo (8.9-8.11). Kích thước mặt cắt ngang tính theo ứng suất pháp bằng phương pháp thử dần. Chọn theo mô men uốn cho kích thước lớn. Sau đó kiểm tra với mô men uốn còn lại và lực dọc

8.3.3 Kéo (nén) lệch tâm



Hình 8.6. Thanh kéo lệch tâm

Khi thanh chịu kéo (nén) lệch tâm tại điểm G (y_G, z_G) ta có thể chuyển lực về tâm tiết diện và nhân được

- Lực dọc $N = P$
- các mô men uốn $M_y = Pz_G$ và $M_z = Py_G$

Khi đó ta có thể đưa về trường hợp kéo (nén) và uốn đồng thời. Khi đó ứng suất pháp có dạng

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{y_G y}{i_z^2} + \frac{z_G z}{i_y^2}\right) \qquad (8.22)$$

Phương trình đường trung hòa

$$1 + \frac{y_G y}{i_z^2} + \frac{z_G z}{i_y^2} = 0 \text{ hay } \frac{y}{-i_z^2 / y_G} + \frac{z}{-i_y^2 / z_G} = 1 \qquad (8.21)$$

Khi kéo, nén đúng tâm đường trung hòa có thể các tính chất sau

– Đường trung hòa phụ thuộc vào vị trí đặt tải và không phụ thuộc vào tải trọng
– Khi điểm đặt lực trên trục x thì đường trung hòa song song với trục y và ngược lại
– Khi điểm đặt lực di chuyển trên đường thẳng nn không đi qua trọng tâm thì đường trung hòa quay quanh một điểm có tọa độ

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_{n0}},\ z_0 = -\frac{i_y^2}{z_{n0}} \qquad (8.21)$$

trong đó y_{n0}, z_{n0} là giao điểm của nn với trục y và trục z.

Lõi tiết diện

Đường trung hòa chỉ phụ thuộc vào vị trí đặt lực nên có thể xẩy ra hai trường hợp

– Đường trung hòa cắt qua tiết diện
– Đường trung hòa nằm ngoài hoặc chỉ tiếp xúp với chu vi của

Định nghĩa: Lõi tiết diện là miền chứa trọng tâm tiết diện và giới hạn bởi một chu tuyến kín để khi đặt lực vào bên trong lõi thì đường trung hòa nằm ngoài tiết diện, khi vị trí đặt lực trên chu tuyến thì đường trung hòa tiếp tuyến với chu vi tiết diện – điều này có nghĩa ứng suất tại mọi điểm của mặt cắt chỉ có một dấu.

Các vật liệu như bê tông, gạch đá chịu kéo rất kém, nên khi thiết kế các cấu kiện chịu nén lệch tâm ta chọn điểm đặt lực sao cho trên tiết diện chỉ có ứng suất nén. Có nghĩa ta chọn điểm đặt lực sao đường trung hòa không cắt qua tiết diện. Do vậy điểm đặt lực phải nằm trong miền của lõi tiết diện.

8.3.4 Kéo (nén) và xoắn đồng thời

Khi thanh chịu mô men xoắn M_x và lực kéo (nén) dọc trục N đồng thời ta có ứng suất pháp

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

và ứng suất tiếp

$$\tau = \frac{M_x}{W_X}$$

trong đó W_x mô men chống xoắn của mặt cắt

Đối với tiết diện tròn

$$\tau = \frac{M_x}{I_p}\rho \text{ và } \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p}$$

Ứng suất chính theo công thức (2.13)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \text{ và } \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Kiểm tra bền theo các thuyết bền.

Đối với vật liệu dẻo ta dùng thuyết bền thứ ba và thứ tư

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma] \tag{8.22}$$

$$\sigma_{tdIV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma] \tag{8.23}$$

Đói với vật liệu kéo, nén khác nhau ta dùng thuyết bền Mohr

$$\sigma_{tdV} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = \frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]_k \tag{8.24}$$

8.3.5 Uốn và xoắn đồng thời

Ta cộng thêm vào trạng thái uốn xiên ứng suất tiếp khi chịu xoắn.

Tiết diện hình tròn

$$\sigma = \frac{M_u}{I_z}\rho \text{ và } \sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_z}, \text{ trong đó } M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

$$\tau = \frac{M_x}{I_p}\rho \text{ và } \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{M_x}{2W_z}$$

Ứng suất chính trong trạng thái ứng suất này theo công thức (2.13) có dạng

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \text{ và } \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Kiểm tra bền theo các thuyết bền.

Đối với vật liệu dẻo ta dùng thuyết bền thứ ba và thứ tư

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_z^2 + M_y^2}}{W_z} \le [\sigma] \quad (8.25)$$

$$\sigma_{tdIV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{0.75M_x^2 + M_z^2 + M_y^2}}{W_z} \le [\sigma] \quad (8.26)$$

Đối với vật liệu kéo, nén khác nhau ta dùng thuyết bền Mohr

$$\sigma_{tdV} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = \frac{1-\nu}{2}\sqrt{M_y^2 + M_z^2} + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \le [\sigma]_k \quad (8.27)$$

Tiết diện hình chữ nhật

Ứng suất tiếp đạt cực đại tại trung điểm cạnh dài (cạnh dài sông với trục z).

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{2W_{xo}}$$

Khi đó ứng suất pháp có giá trị

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z}$$

Tại trung điểm cạnh ngắn

$$\tau = \gamma\tau_{\max} \text{ và } \sigma = \frac{M_y}{W_y}$$

Điều kiện bền theo ứng suất pháp của uốn xiên cần được kiểm tra

$$\frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma]^k, \; -\frac{|M_z|}{W_z} - \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma]_n$$

Kết luận chương 8

Chương 8 trình bày bài toán thanh chịu lực phức tạp. Xem xét trương hợp tổng quát đưa ra các công thức tính ứng suất và dịch chuyển.

Xem xét các trường hợp chịu lực phức tạp kết hợp của hai hay nhiều hơn các trường hợp thanh chịu lực cơ bản như: kéo và uốn, kéo, nén lệch tâm, xoắn và uốn.

CHƯƠNG 9

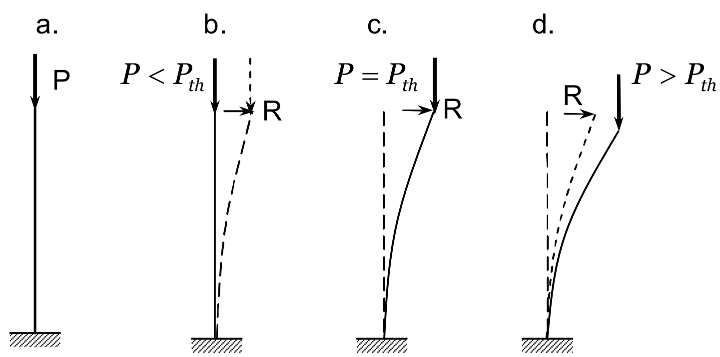
Ổn định của thanh thẳng

9.1 Giới thiệu chung

Như đã nói trong phần nhập môn mục đích của môn học là đánh giá độ bền, độ cứng và độ ổn định của công trình. Các chương năm đến chương tám đề cập đến việc đánh giá trạng thái ứng suất, biến dạng và dịch chuyển của thanh sau đó đánh giá độ cứng, độ bền của thanh trong các trường hợp chịu lực khác nhau. Trong chương chín này ta quan tâm đến vấn đề ổn định của kết cấu. Cụ thể là ổn định của thanh thẳng chịu nén – bị uốn dọc và nén và uốn đồng thời

Như đã định nghĩa: Độ ổn định là khả năng duy trì, bảo toàn được dạng cân bằng ban đầu trước các tác dụng của các nhiễu động.

Ta xét một thanh thẳng chịu nén đúng tâm bởi lực P (hình 9.1a).



Hình 9.1. Thanh chịu nén dọc trục

Nhiễu động được mô hình hóa bằng lực ngang R. Ta cho trị số của lực nén tăng dần bắt đầu từ không. Tác động vào thanh một lực ngang đủ nhỏ để thanh dời khỏi vị trí thẳng (vị trí cân băng ban đầu) thanh sẽ cong đi. Dạng cong của thanh là dạng cân bằng nhiễu động. Khi ta bỏ lực ngang sẽ xảy ra các trường hợp sau

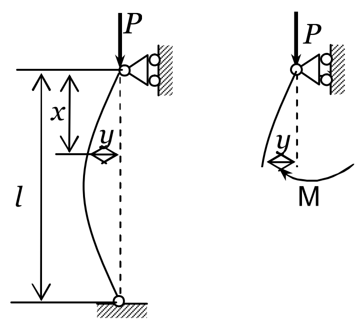
- Khi lực nén dọc trục nhỏ, nhỏ hơn một giá trị tới hạn nào đó $P < P_{th}$, thanh sẽ trở lại vị trí thẳng ban đầu. Trạng thái cân bằng này của thanh là ổn đinh (hình 9.1b)

- Khi lực nén dọc trục lớn, lớn hơn một giá trị tới hạn $P > P_{th}$, thanh không trở lại vị trí thẳng ban đầu mà còn tiếp tục cong thêm. Trạng thái cân bằng này của thanh là không ổn đinh hay còn gọi là mất ổn định. Do thanh cong sẽ xuất hiện hiên tượng uốn trong thanh dẫn đến ứng suất và biến dạng tăng và thanh có thể sẽ bị phá hủy (hình 9.1d)
- Khi lực nén dọc trục đạt giá trị tới hạn $P = P_{th}$, thanh không thẳng trở lại và cũng không cong thêm. Trang thái này được gọi là trạng thái cân bằng tới hạn (hình 9.1c)

Tương tự khi thanh chịu uốn cũng mất ổn định khi lực ngang vượt qua giá trị tới hạn $F > F_{th}$. Khi đó thanh không chỉ chịu uốn mà còn chịu xoắn.

9.2 Lực tới hạn và ứng suất tới hạn

9.2.1 Thanh liên kết khớp



Hình 9.2. Bài toán Euler

Xét thanh liên kết khớp hai đầu, chịu lực nén P đúng tâm. Giả thiết $P = P_{th}$ làm thanh cong đi. Tại tiết diện có tọa độ x khi bi uốn có độ võng là y. Kí hiệu độ cứng chống uốn là EI, mô men uốn tại mặt cắt là M ta có phương trình vi phân độ võng

$$y'' = -\frac{M}{EI} \tag{9.1}$$

Mô men uốn tính qua lực nén dọc trục và độ võng

$$M = Py \tag{9.2}$$

Thế (9.2) vào (9.1) ta được phương trình vi phân

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

trong đó $\alpha^2 = \dfrac{P}{EI}$ (9.3)

Nghiệm của (9.4) có dạng

$$y = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x$$

C_1 và C_2 tìm từ điều kiện biên ta có tại $x = 0$ $y = 0$ suy ra $C_1 = 0$, tại $x = l$ $y = 0$ suy ra $C_2 \sin\alpha l = 0$ vì độ võng khác không nên $C_2 \neq 0$ và ta có

$$\sin\alpha l = 0 \Rightarrow \alpha l = k\pi \text{, với } k = 1,2,3... \qquad (9.4)$$

Thay (9.4) vào (9.3) ta có

$$P = \frac{k^2\pi^2 EI}{l^2} \text{, với } k = 1,2,3...$$

Đây là điều kiện để độ võng khác không tức là điều kiện mất ổn định của thanh. Giá trị của P với k nhỏ nhất k=1 là giá trị tải trọng tới hạn

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \qquad (9.5)$$

Đây là công thức Euler xác định tải trọng tới hạn cho trường hợp liên kết là khớp hai đầu. Ở đây ta chọn mô men quán tinh nhỏ nhất của tiết diện, P_{th} khi xét uốn quanh trục quán tính chính có mô men quán tính nhỏ nhất cũng là nhỏ nhất.

Các dạng liên kết khác sẽ được xem xét trong mục sau

9.2.2 Thanh thẳng có các liên kết khác

Tương tự như cách làm trong mục 9.2.1 ta xét các điểu kiện liên kết khác để tìm tải trọng tới han. Công thức Euler (9.7) có thể viết tổng quát hơn như sau

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l_{td}^2} \qquad (9.6)$$

trong đó $l_{td} = \mu l$ là chiều dài tương đương của thanh, l chiều dài thưc. Giá trị μ ứng với từng loại liên kết và cách đặt tải cho trên hình 9.3

9.2.3 Ứng suất tới hạn và độ mảnh

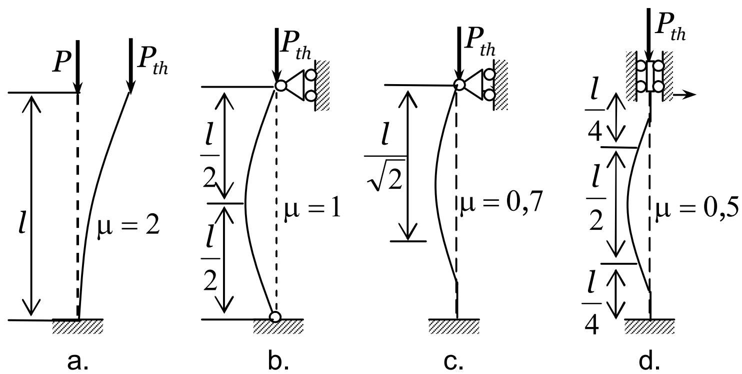
Tính ứng suất tới hạn theo công thức

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{\mu^2 l^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad (9.7)$$

trong đó

$$\lambda = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{l_{td}}{i} \tag{9.8}$$

là độ mảnh của thanh, i $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ là bán kính quán tính nhỏ nhất của tiết diện.



Hình 9.3. Giá trị μ ứng với từng loại liên kết

Tải trọng tới hạn Euler được tìm từ phương trình vi phân đường đàn hồi, do vậy chỉ đúng khi vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi. Do vậy ứng suất tới hạn phải nhỏ hơn ứng suất tỉ lệ

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{tl}$$

Từ đây ta rút ra được quan hệ

$$\lambda \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}$$

Đặt

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \tag{9.9}$$

ta có điều kiện để áp dụng công thức Euler

$$\lambda \ge \lambda_0 \tag{9.10}$$

9.3 Tính ổn định cho thanh chịu nén

Như vậy khi tính toán thanh chịu nén ngoài kiểm tra bền ta cần kiểm tra điều kiện ổn định cho lực dọc trục

$$N \le \frac{P_{th}}{n_{od}} = [P]_{od} \tag{9.11}$$

hoặc cho ứng suất pháp

$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma]_{od} = \frac{\sigma_{th}}{n_{od}} \tag{9.12}$$

trong đó A diện tích nguyên của tiết diện

Để tiện cho việc kiểm tra ổn định người ta đưa thêm đại lượng φ

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{od}}{[\sigma]} \tag{9.13}$$

Khi đó (9.13) được viết lại thành

$$\frac{N}{\varphi A} \le [\sigma]_n \tag{9.14}$$

Đại lượng φ được gọi là hệ số uốn dọc hay hệ số giảm ứng suất cho phép về nén. Từ công thức (9.14) φ sẽ làm hàm phụ thuộc vào độ mảnh λ

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{od}}{[\sigma]_n} = \frac{\sigma_{th} n}{\sigma_{ch} n_{od}} = \varphi(\lambda) \tag{9.15}$$

Đại lượng φ được lập thành bảng cho các vật liệu cho trước trong phụ lục 8.

Để kiểm tra ổn định có thể sử dụng hai phương pháp

Phương pháp thứ nhất: cho trước n_{od}. Phương pháp này ít được dùng vì nó thi ếu chính xác vì định trước n_{od} khi chưa biết độ mảnh λ. Người ta sử dụng khi vật liệu mới hay thanh có độ mảnh vượt ra ngoài bảng $\varphi(\lambda)$.

Phương pháp thứ hai: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

Tính toán ổn định có ba bài toán cơ bản

- Xác định tải trọng cho phép
- Kiểm tra ổn định thanh

– Bài toán thiết kế chọn lựa mặt cắt ngang

9.3.1. Xác định tải trọng cho phép

Phương pháp thứ nhất: Khi cho trước n_{od} xác định tải trọng cho phép theo ba bước sau

– Xác định độ mảnh theo (9.8) $\lambda = \dfrac{\mu l}{i}$.

– Xác định tải trọng tới hạn Euler theo (9.6) $P_{th} = \dfrac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{td}^2}$;

– Tính tải trọng ổn định cho phép theo (9.11) $[P]_{od} = \dfrac{P_{th}}{n_{od}}$

Phương pháp thứ hai: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

– Xác định độ mảnh theo (9.8) $\lambda = \dfrac{\mu l}{i}$

– Xác định hệ số uốn dọc φ dựa trên độ mảnh λ theo bảng $\varphi(\lambda)$

– Tính tải trọng cho phép $P = [\sigma]\varphi A$

9.3.2 Kiểm tra ổn định của thanh

Tiến hành theo hai phương pháp trên tương tự như xác định tải trọng cho phép.

9.3.3 Bài toán thiết kế

Phương pháp thứ nhất rất ít dùng do thiếu chính xác.

Phương pháp thứ hai: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

– Cho hệ số uốn dọc $\varphi = 0{,}6 \div 0{,}8$

– Tính ứng suất ổn định $[\sigma]_{od} = \varphi \cdot [\sigma]$,

– tính diện tích tiết diện theo $A = \dfrac{P}{[\sigma]_{od}} = \dfrac{P}{[\sigma]\varphi}$ chọn kích thước mặt cắt hay số hiệu thép hình từ bảng

– Tìm I, i và λ

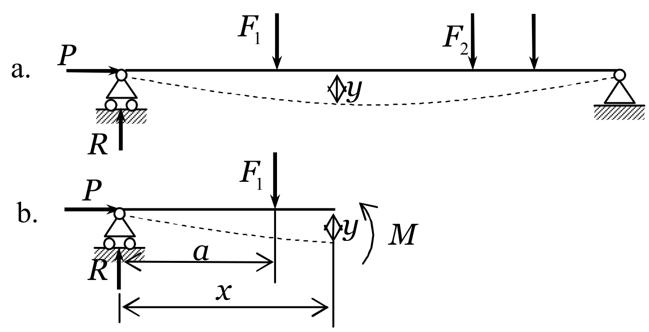
– Tìm giá trị mới φ từ bảng $\varphi(\lambda)$. Nếu φ_2 khác nhiều so với φ_1 ta lặp lại quy trình với hệ số uốn dọc mới $\varphi_2 = 0{,}5(\varphi + \varphi_1)$ cho đến khi sai khác không quá 5%

Phương pháp hỗn hợp: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

- Chọn hệ số n_{od} tương ứng với vật liệu (thép $n_{od} \approx 2$, gang $n_{od} \approx 5$ và gỗ $n_{od} \approx 3$)
- Tìm I_{min} từ công thức (9.6)
- Chọn kích thước mặt cắt hay số hiệu mặt cắt (thép hình) tính A, i, λ
- Xác định φ từ bảng $\varphi(\lambda$ và tính $[\sigma]_{od} = \varphi \cdot [\sigma]$
- Kiểm tra điều kiện ổn định (9.14).Nếu không thỏa mãn thay đổi φ (theo phương pháp thứ hai) hay thay đổi kích thước mặt cắt

9.4 Uốn ngang và uốn dọc đồng thời

9.4.1 Phương trình vi phân của đường đàn hồi



Hình 9.4. Thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời

Xét thanh chịu đồng thời tải trọng ngang và tải trọng dọc trong mặt phẳng xy (hình 9.4a). Bằng phương pháp mặt cắt (hình 9.4b) ta xác định mô men uốn tại mặt cắt có tọa độ x

$$M = Py + [Rx - F_1(x-a)]$$

Ta thấy số hạng Py là uốn dọc do tải trọng dọc P gây ra, nó phụ thuộc vào độ võng. Các số hạng trong dấu ngoặc vuông được xác định như trong bài toán uốn ngang bình thường ta kí hiệu là $\overline{M}$ khi đó ta viết lại

$$M = Py + \overline{M} \tag{9.16}$$

Lắp vào phương trình vi phân độ võng

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

ta nhận được

$$y'' + k^2 y = -\frac{\overline{M}_z}{EI_z} \tag{9.17}$$

trong đó

$$k^2 = \frac{P}{EI_z} \tag{9.18}$$

Nghiệm của (9.17) có dạng

$$y = y^* + \overline{y} \tag{9.19}$$

y^* là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

$\overline{y}$ là nghiệm riêng phụ thuộc vào biểu thức cụ thể của mô men uốn ngang $\overline{M}$ tức là phụ thuộc vào dạng tải trọng tác dụng

9.4.2 Biểu thức gần đúng của độ võng

Thanh có liên kết khớp ở hai đầu

Giả thiết tải trọng ngang hướng về một phía và đối xứng qua mặt cắt giữa dầm. Khi đó độ võng cực trị f sẽ ở vị trí giữa dầm. ta chọn hàm độ võng thỏa mãn các giả thiết trên có dạng

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l} \tag{9.20}$$

Độ võng $\overline{y}$ cũng viết dưới dạng tương tự

$$\overline{y} = \bar{f} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{9.21}$$

Độ võng $\bar{f}$ do tải trọng ngang ở chính giữa dầm hoàn toàn có thể tìm được bằng các phương pháp quen thuộc khi giải bài toán thanh chịu uốn. $\overline{y}$ vẫn thỏa mãn phương trình vi phân của đường đàn hồi

$$\overline{y}'' = -\frac{\overline{M}}{EI}$$

Thế vào phương trình (9.17) ta được

$$y'' + k^2 y = -\overline{y}'' \tag{9.22}$$

Thay thế (9.20), (9.21) vào (9.22) ta nhận được biểu thức

$$f = \frac{\bar{f}}{1 - \dfrac{P}{P_{th}}}, \; P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{9.23}$$

Thay thế (9.23) vào (9.20) ta được

$$y = \frac{\overline{y}}{1 - \dfrac{P}{P_{th}}} \tag{9.24}$$

Ta vẫn có thể dùng (9.24) cho các dạng liên kết khác nhưng chú ý biểu thức của lực tới hạn lúc đó tính

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

9.4.3 Biểu thứ gần đúng của mô men uốn

Ta thế biểu thức (9.24) của độ võng y vào biểu thức mô men uốn (9.16)

$$M = Py + \overline{M} = \overline{M} + P\frac{\overline{y}}{1 - \dfrac{P}{P_{th}}} \tag{9.25}$$

Sử dụng phép gần đúng sau đây. Từ phương trình vi phân đường đàn hồi ta có

$$\frac{M_z}{\overline{M}_z} = \frac{y''}{\overline{y}''}$$

Thay thế biểu thức của độ võng y (9.20) và $\overline{y}$ (9.21) vào quan hệ trên

$$\frac{M_z}{\overline{M}_z} = \frac{f}{\bar{f}} = \frac{1}{1 - \dfrac{P}{P_{th}}}$$

Ta nhận được biểu thức gần đúng của mô men uốn

$$M_z = \frac{\overline{M}_z}{1 - \dfrac{P}{P_{th}}} \tag{9.26}$$

9.4.4 Ứng suất và điều kiện bền

Thanh chịu tải trọng dọc trục và tải trọng ngang ta có biểu thức của ứng suất pháp

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M_z}{I_z} y$$

Sử dụng công thức gần đúng của mô men uốn ta có ứng suất pháp cực đại

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{A} + \frac{|M_z|}{W_z} \approx -\frac{P}{A} + \frac{|\overline{M}_z|}{W_z\left(1 - \frac{P}{P_{th}}\right)} \qquad (9.27)$$

Ta nhận thấy ứng suất tăng không tỉ lệ với tải trọng, mà tăng nhanh hơn. Như thế hệ số an toàn bé hơn hệ số n, do vậy ta không kiểm tra theo ứng suất cho phép mà kiểm tra theo tải trọng cho phép. Điều kiện bền cho uốn ngang và uốn dọc đồng thời có dạng

$$-\frac{nP}{A} + \frac{|n\overline{M}_z|}{W_z\left(1 - \frac{nP}{P_{th}}\right)} \le \sigma_y \qquad (9.28)$$

Chú ý cần kiểm tra ổn định của thanh

$$\frac{P}{\varphi A} \le [\sigma] \qquad (9.14)$$

trong đó φ là hệ số uốn dọc tra từ bảng $\varphi(\lambda)$ cho từng loại vật liêu như hàm của độ mảnh λ.

Kết luận của chương 9

Chương 9 trình bày ổn định của thanh thẳng. Đưa định nghĩa về trạng thái ổn định, lực tới hạn theo Euler và ứng suất tới hạn.

Xem xét ổn định của thanh chịu nén đúng tâm sử dụng tham số hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$ là hàm của độ mảnh λ của thanh. Hệ số uốn dọc chính là tỉ lệ giữa ứng suất cho phép về ổn định và ứng suất cho phép về nén, do vậy người ta còn gọi $\varphi(\lambda)$ là hệ số suy giảm ứng suất cho phép về nén.

Bài toán ổn định của thanh chịu nén và uốn ngang cũng được xem xét trong chương 9 này.

PHẦN 2. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TÍNH TOÁN HỆ THANH

Mục đích của phần hai là nghiên cứu các phương pháp phân tích kết cấu dạng khung, dàn. Như đã nói ở phần nhập môn đối tượng của phần này là các kết cấu hợp thành từ các phần tử có kích thước đủ dài khi so sánh với mặt cắt ngang. Đó là dầm, dàn phẳng, dàn không gian, khung phẳng, khung ngang và khung không gian như trên hình 1 ở phần nhập môn.

Lưu ý khi phân tích hệ thanh ta vẫn chấp nhận các giả thiết

- Chuyển vị và góc xoay của kết cấu thay đổi tuyến tính đối với lực tác dụng có nghĩa chúng tỷ lệ với lực tác dụng
- Biến dạng nhỏ có nghĩa các chuyển vị không làm thay đổi hình học của kết cấu do vậy không thay đổi lực tác dụng lên kết cấu
- Từ hai giả thiết trên ta có nguyên lý cộng tác dụng: Dưới tác động của tổ hợp lực ta có thể cộng dồn ứng suất, biến dạng và chuyển vị gây ra bởi từng lực riêng biệt
- Ứng xử của vật liệu là đàn hồi tuân thủ định luật Hooke

Các hệ thanh mà ta sẽ khảo sát chủ yếu là các hệ siêu tĩnh. Phân tích hệ siêu tĩnh dẫn đến giải hệ phương trình tuyến tính với số ẩn phụ thuộc vào phương pháp mà ta lựa chọn. Khi tính toán bằng máy tính bấm tay ta có thể sử dụng các thuật toán lặp hay chỉnh dần để làm giảm số phép tính. Trong khuôn khổ của giáo trình này, các phương pháp lực, phương pháp chuyển vị và phương pháp công ảo được trình bày lần lượt trong chương 11, 12 và 13

Đối với hệ lớn và phức tạp ta sử dụng máy tính sử dụng các chương trình phân tích kết cấu dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Vì vậy phương pháp phần tử hữu hạn cũng được giới thiệu trong chương 14.

CHƯƠNG 10
Hệ siêu tĩnh

10.1 Siêu tĩnh

Xét vật thể tự do chịu lực trong không gian. Khái niệm lực bao gồm lực tập trung và cặp ngẫu lực (hay mô men).

Vật thể ở trạng thái cân bằng khi tổng các lực tác dụng thỏa mãn phương trình cân bằng tĩnh học

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0. \qquad (10.1)$$

Trong không gian trực giao ba chiều ta có sáu phương trình cân bằng. Khi ta xét trong mặt phẳng còn lại ba phương trình

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z = 0. \qquad (10.2)$$

Khi kết cấu ở trạng thái cân bằng thì các thành phần tạo thành cũng ở trạng thái cân bằng. Có nghĩa tại mỗi phần tử, nút hay một phần của kết cấu cũng ở trạng thái cân bằng.

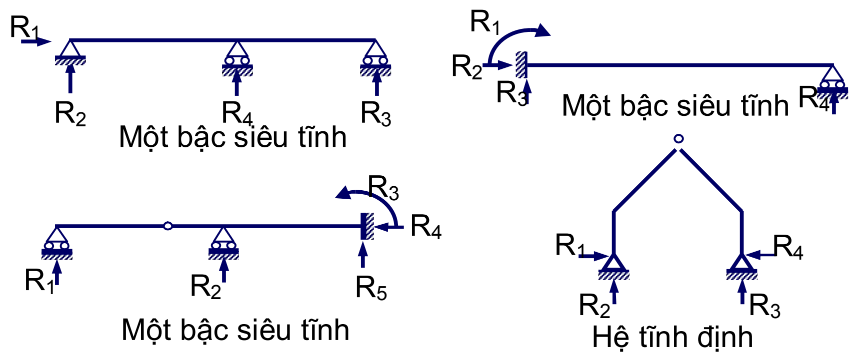
Phân tích kết cấu là xác định phản lực tại các gối đỡ và ứng suất do nội lực gây ra. Khi số phương trình cân bằng đủ để xác định các lực cần tìm thì kết cấu (hệ) được gọi là *tĩnh định.* Khi số lực cần tìm lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học thì kết cấu (hệ) được gọi là *siêu tĩnh*, phần lớn các kết cấu trong thực tế là hệ siêu tĩnh.

Phân loại hệ siêu tĩnh

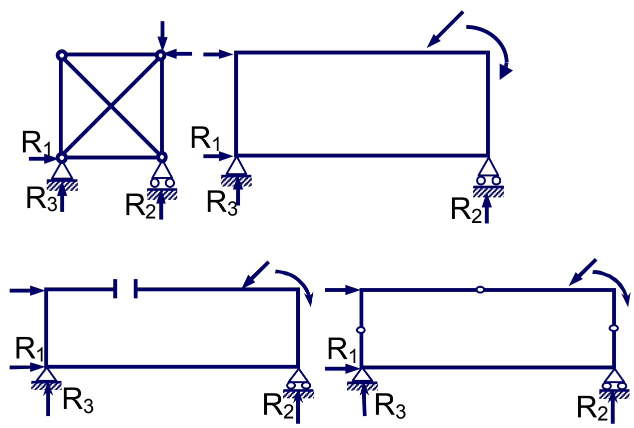
Hệ có thể là siêu tĩnh ngoại, siêu tĩnh nội hoặc cả hai.

- Siêu tĩnh ngoại là khi số phản lực cần xác định lớn hơn số phương trình cân bằng. Bậc siêu tĩnh ngoại bằng số phản lực trừ đi số phương trình cân bằng (hình 10.1).
- Siêu tĩnh nội là khi số phương trình cân bằng vẫn đủ để xác định phản lực, nhưng nội lực không thể tìm được nếu chỉ sử dụng phương trình cân bằng

Giải phóng nội lực bằng cách cắt thanh hay đặt khớp nối ta có thể đưa hệ về hệ tĩnh định (Hình 10.2). Số nội lực cần giải phóng bằng bậc siêu tĩnh nội.

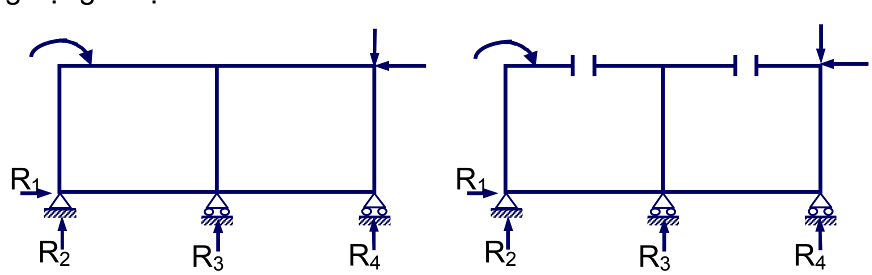


Hình 10.1. Các ví dụ về bậc siêu tĩnh nội



Hình 10.2. Các ví dụ về bậc siêu tĩnh ngoại

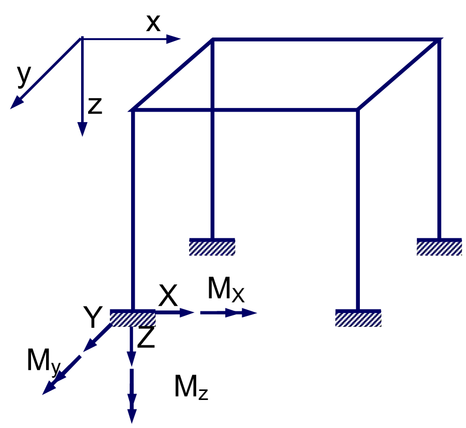
- Siêu tĩnh cả ngoại và nội. Xét ví dụ về hệ khung phẳng trên Hình 11.3 hệ có bốn phản lực như vậy ta có một bậc siêu tĩnh ngoại. Nhưng để xác định nội lực cần giải phóng nội lực tại hai mặt cắt suy ra ta có sáu bậc siêu tĩnh nội. Tổng cộng 7 bậc siêu tĩnh



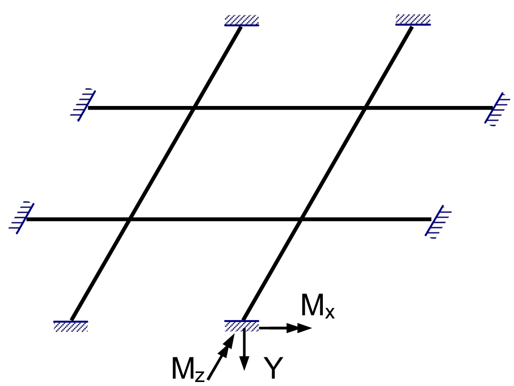
Hình 10.3. Kết cấu siêu tĩnh cả nội và ngoại

Tương tự ta xét hệ khung không gian trên Hình 11.4. Tại mỗi ngàm có sáu thành phần phản lực như vậy tổng cộng có 24 phản lực. Có sáu phương trình cân bằng vậy bậc siêu tĩnh ngoại là 18. Để xác định nội lực ta cần giải phóng một mặt cắt vậy ta có sáu bậc siêu tĩnh nội. Tổng cộng 24 bậc siêu tĩnh.

Ta xét hệ lưới trên Hình 11.5, do chỉ chịu lực vuông góc với mặt phẳng xz nên các thành phần phản lực X, Z, M_y tại gối đỡ và các nội lực X, Z, M_Y tại các phần tử sẽ triệt tiêu. Như vậy tổng cộng ta có 24 phản lực và ba phương trình cân bằng suy ra hệ có 21 bậc siêu tĩnh ngoại. Để tìm nội lực ta cần giải phóng nội lực ở một trong bốn thanh như vậy ta có ba bậc siêu tĩnh nội. Hệ có tổng cộng 24 bậc siêu tĩnh. Trường hợp các thanh của hệ lưới không chịu xoắn có nghĩa là liên kết các thanh là liên kết khớp các mô men xoắn sẽ bị triệt tiêu nên hệ sẽ chỉ còn 12 bậc siêu tĩnh.



Hình 10.4. Hệ khung không gian



Hình 10.5. Hệ lưới ngang

Xác định bậc siêu tĩnh

– Xét dàn phẳng có r phản lực, m phần tử và j nút khớp

+ Lực cần tìm gồm m nội lực tại từng thanh, r phản lực, tổng cộng có m+r

+ Tại mỗi nút có hai phương trình cân bằng

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_x = 0;$$

vậy tổng là 2j phương trình

+ Vậy số bậc siêu tĩnh sẽ là:

$$i = (m + r) - 2j \tag{10.3}$$

– Với dàn không gian có r phản lực, m phần tử và j nút khớp ta có

+ Tại mỗi nút có ba phương trình cân bằng

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_x = 0, \quad \sum F_z = 0,$$

+ Vậy số bậc siêu tĩnh sẽ là

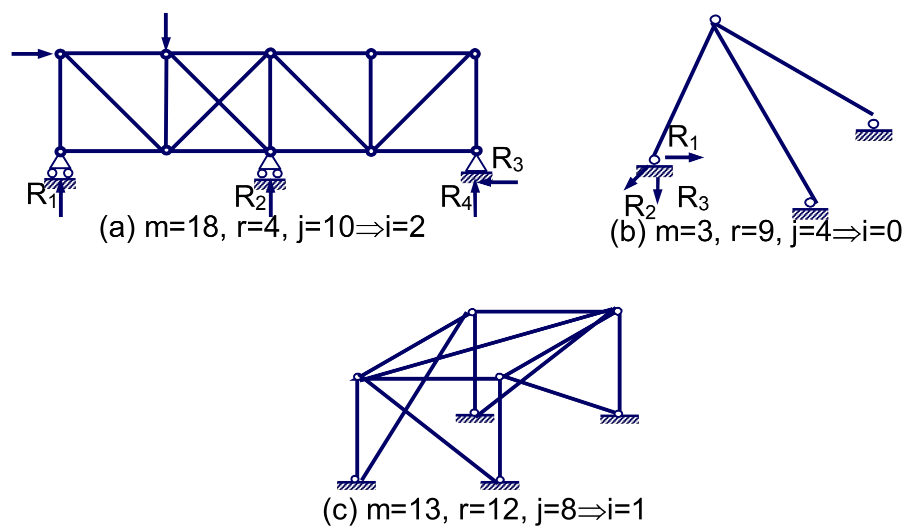
$$i = (m + r) - 3j \tag{10.4}$$

Ví dụ tìm bậc siêu tĩnh cho các kết cấu trên Hình 11.6

– dàn phẳng (a) r=4, m=18, j=10 vậy i=2,

– dàn không gian (b) m=3, r=9, j=4, vậy i=0 dàn tĩnh định,

– dàn (c) m=13, r=12, j=8 vậy i=1.



Hình 10.6. Tính bậc siêu tĩnh cho hệ dàn

– Xét khung phẳng có m phần tử, r phản lực và j nút liên kết cứng

+ Nội lực trong thanh (Hình 10.7a) có thể tìm được nếu ta biết ba trong sáu lực đầu phần tử vậy mỗi thanh có ba nội lực cần tìm, tổng lực cần tìm là 3m+r

+ Tại mỗi nút có ba phương trình cân bằng gồm hai phương trình lực và một phương trình mô men

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_x = 0, \quad \sum M_z = 0,$$

+ Như vậy số bậc siêu tĩnh:

$$i = (3m + r) - 3j \tag{10.5}$$

– Khung không gian với m phần tử, j nút, r phản lực

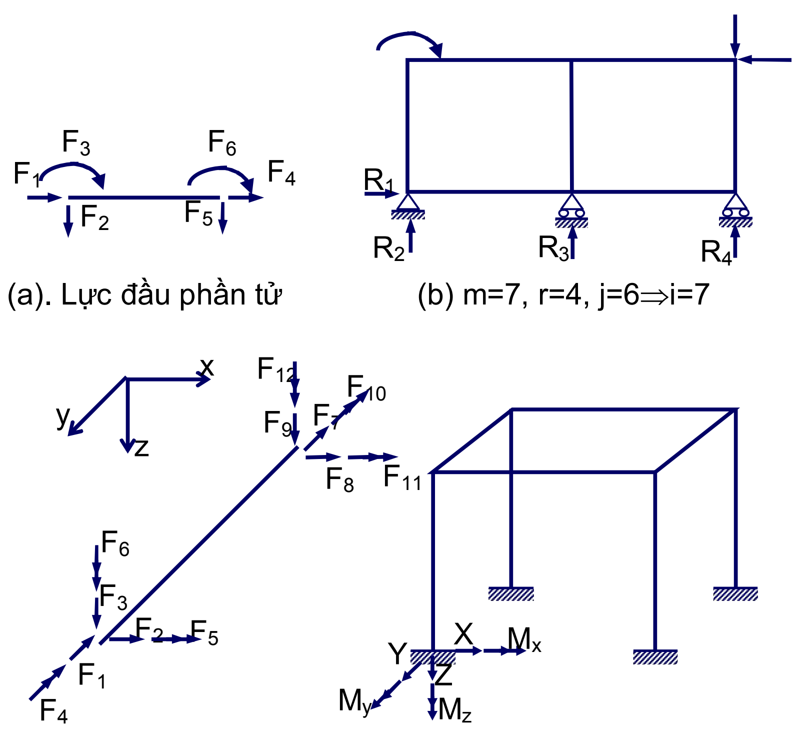
+ Nội lực trong thanh (Hình 10.7c) có thể tìm được nếu ta biết sáu trong 12 lực đầu phần tử vậy mỗi thanh có sáu nội lực cần tìm, tổng lực cần tìm là 6m+r

+ Phương trình: tại mỗi nút có đủ cả sáu phương trình cân bằng gồm ba phương trình lực và ba phương trình mô men (10.1)

+ Số bậc siêu tĩnh:

$$i = (6m + r) - 6j \tag{10.6}$$

Ví dụ khung phẳng (Hình 10.7b) có bảy thanh m=7, bốn phản lực r=4, sáu nút j=6 vậy có bậc siêu tĩnh là $i = (3 \times 6 + 4) - 3 \times 6 = 7$. Còn khung không gian (Hình 10.7d) có tám thanh m=8, có bốn nút bị ngàm chặt nên số phản lực r=24, có tổng cộng tám nút j=8, như vậy bậc siêu tĩnh $i = (6 \times 8 + 24) - 6 \times 8 = 24$



(a). Lực đầu phần tử (b) m=7, r=4, j=6⇒i=7

(c) Lực đầu phần tử (d) m=8, r=24, j=8⇒i=24

Hình 10.7 Tính bậc siêu tĩnh cho khung phẳng và khung không gian

10.2 Bậc tự do

Các phương pháp chung giải bài toán siêu tĩnh

Mục đích của phân tích kết cấu là tìm ngoại lực (các thành phần phản lực) và nội lực thỏa mãn điều kiện cân bằng, điều kiện liên kết. Biến dạng do các lực này gây ra đảm bảo tính tương thích, tính liên tục và các điều kiện tại các gối đỡ.

Như đã biết để phân tích hệ siêu tĩnh ngoài phương trình cân bằng ta cần đưa thêm các liên hệ hình học giữa biến dạng - gọi là điều kiện hình học (hay điều kiện tương thích). Các liên hệ này đảm bảo tính tương thích của chuyển vị với hình học của kết cấu.

Có hai cách tiếp cận để phân tích kết cấu

– Phương pháp lực (hay phương pháp độ mềm): ta giải phóng một số liên kết để kết cấu thành tĩnh định. Sẽ xuất hiện sự không tương thích về chuyển vị. Sự không tương thích sẽ được điều chỉnh bằng cách đặt thêm các lực.

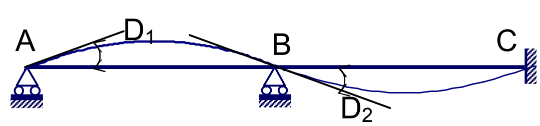
– Phương pháp chuyển vị (phương pháp độ cứng) ta thêm các ràng buộc hạn chế chuyển vị, xác định các phản lực tại ràng buộc đó, sau đó cho các phản lực đó bằng không để xác định chuyển vị tại các điểm bị hạn chế.

Phương pháp lực: ta chọn ẩn là các lực cần để đảm bảo tính tương thích về hình học, thường dẫn đến giải hệ phương trình với số ẩn bằng số lực cần xác định.

Phương pháp chuyển vị: ta chọn ẩn là chuyển vị tại các nút, số lực ràng buộc thêm vào bằng số chuyển vị tại nút. Như vậy các chuyển vị cần tìm chính là sự không xác định động học.được gọi là bậc tư do

Xác định bậc tự do của hệ

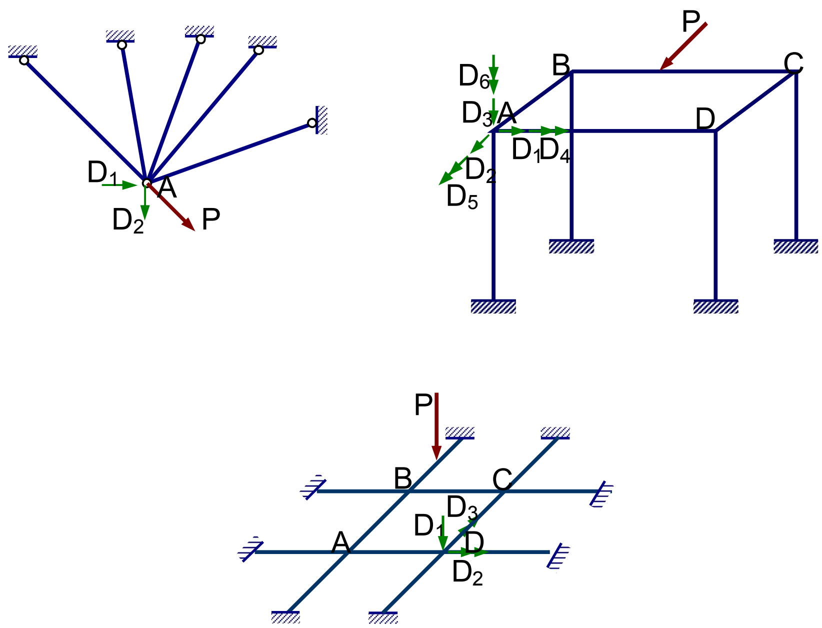
Như vậy chuyển vị tại các nút là các ẩn trong phương pháp chuyển vị. Ví dụ trên Hình 10.8 tại ngàm C không có chuyển vị, tại gối đỡ A, B, không có chuyển vị thẳng nhưng có góc xoay. Vậy số chuyển vị chưa biết là hai gồm D_1 và D_2.



Hình 10.8. Ví dụ về bậc tự do

Chuyển vị nút độc lập là các chuyển vị thay đổi độc lập, không phụ thuộc vào sự thay đổi của các chuyển vị khác. Số các chuyển vị nút độc lập là số bậc tự do (bậc không xác định động học) của hệ.

Chú ý phân biệt giữa bậc siêu tĩnh và bậc tự do. Hệ trên Hình 10.6b bậc siêu tĩnh là không những bậc tự do là ba. Còn hệ trên hình 10.6c bậc siêu tĩnh là một, bậc tự do là 12.



Hình 10.9. Ví dụ bậc tự do của một số kết cấu

Trên Hình 10.9 là các ví dụ về xác định bậc tự do của hệ. Hệ dàn phẳng (Hình 10.9c) có hai bậc tự do là chuyển vị ngang và chuyển vị dọc của nút A. Hệ khung không gian (Hình 10.9b) có 24 bậc tự do. Mỗi nút tự do của khung có thể thực hiện 3 chuyển vị thẳng và 3 chuyển vị xoay tổng số sáu bậc tư do. Hệ có bốn nút A, B, C và D nên hệ có 24 bậc tự do. Hệ lưới ngang (Hình 10.9c) có 12 bậc tự do, mỗi nút tự do của lưới thực hiện một chuyển vị thẳng đứng và hai chuyển vị quay tổng số là 3 bậc tự do. Hệ có bốn nút A, B, C và D nên hệ có 12 bậc tự do

10.3 Đường ảnh hưởng

Khi thiết kế ta quan tâm đến nội lực dưới tác động của tải cố định và hoạt tải. Ví dụ tải cố định là tải trọng bản thân, còn hoạt tải có thể là máy móc đặt trên sản, tải của bánh xe tác động lên cầu. Khi phân tích hoạt tải thường được biểu diễn như tải phân bố hay tổ hợp các tải tập trung

Khi thiết kế ta quan tâm đến giá trị cực đại của nội lực tại mặt cắt khác nhau. Do vậy hoạt tải có thể được đặt tại đúng vị trí làm cho nội lực đạt cực đại. Để xác định vị trí của tải di động gây ra nội lực cực đại người ta dùng đường ảnh hưởng.

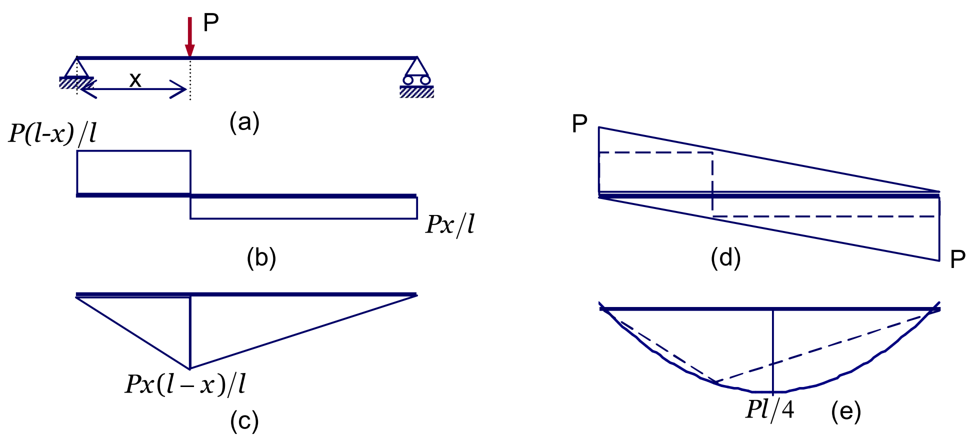
Đầu tiên ta xét ảnh hưởng của tải di động lên dầm đơn giản

10.3.1. Ảnh hưởng của lực tập trung

Xét ảnh hưởng của một lực tập trung chuyển động dọc trên dầm đơn giản như trên Hình 10.13a. Tại mặt cắt n bất kỳ trên dầm biểu đồ lực cắt và moment như Hình 10.13b và c. Công thức tính lực cắt và moment cực đại có dạng

$$V_{n\max+} = P\frac{l\text{-}x}{l};\quad V_{n\max-} = -P\frac{x}{l};\quad M_{n\max+} = P\frac{x(l\text{-}x)}{l} \tag{10.7}$$

Đường bao của lực cắt cực đại biểu diễn trên Hình 10.13d là các đường thẳng, đường bao của moment cực đại biểu diễn trên Hình 10.13e là đường parabol bậc hai. Chúng được gọi là biểu đồ lực cặt cực đại và biểu đồ moment cực đại, chúng biểu diễn nội lực cực đại mà mặt cắt phải chịu khi thiết kế.



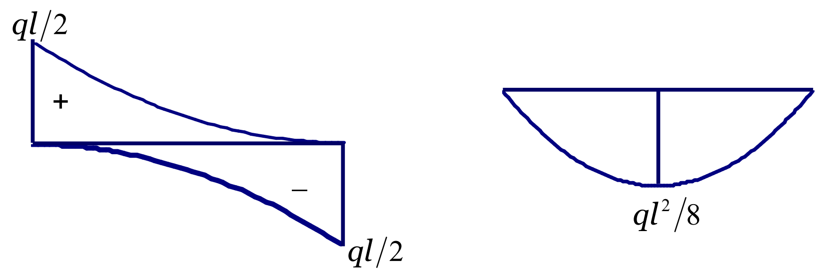
Hình 10.13

10.3.2 Ảnh hưởng của lực phân bố đều

Dầm chịu lực phân bố đều đặt trên toàn bộ hoặc một phần của độ dài. Moment cực đại xuất hiện khi lực phân bố trên toàn bộ độ dài của dầm. Còn lực cắt dương (âm) đạt cực đại khi lực phân bố năm trên toàn bộ phân bên phải (bên trái) của mặt cắt. Công thức tính lực cắt và moment cực đại tại mặt cắt bất kỳ có dạng

$$V_{n\max+} = q\frac{(l\text{-}x)^2}{2l};\quad V_{n\max-} = -q\frac{x^2}{2l};\quad M_{n\max+} = q\frac{x(l\text{-}x)}{2} \tag{10.8}$$

Biểu đồ lực cắt cực đại và moment cực đại biểu diễn trên Hình 10.14, chúng đều là các parabol bậc hai



Hình 10.14

10.3.3 Ảnh hưởng của hai lực tập trung

Hai lực tập trung $P_1 \geq P_2$, khoảng cách giữa hai lực s chuyển động dọc treo độ dài của dầm. Công thức tính lực cắt và moment cực đại tại mặt cắt bât kỳ có dạng

$$M_{n\max+} = \frac{x(l\text{-}x)}{l}\left(P_1 + P_2\frac{l-x-s}{l-x}\right) \quad \text{khi} \quad 0 \leq x \leq l-s \tag{10.9}$$

$$M_{n\max+} = \frac{x(l\text{-}x)}{l}\left(P_2 + P_1\frac{l-x-s}{l-x}\right) \quad \text{khi} \quad s \leq x \leq l \tag{10.10}$$

$$V_{n\max+} = P_1\frac{l-x}{l} + P_2\frac{l-x-s}{l} \quad \text{khi} \quad 0 \leq x \leq l-s \tag{10.11}$$

$$V_{n\max+} = P_1\frac{s-x}{l} - P_2\frac{x}{l} \quad \text{khi} \quad s \leq x \leq l \tag{10.12}$$

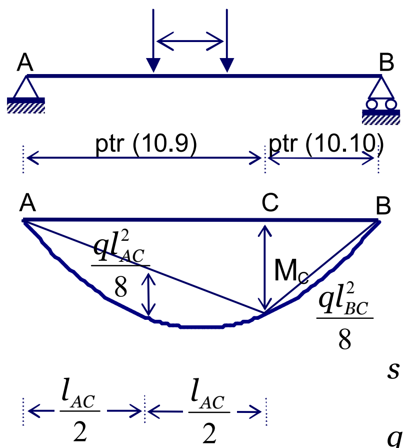
Biểu đồ lực cắt cực đại và moment cực đại biểu diễn trên Hình 10.15,

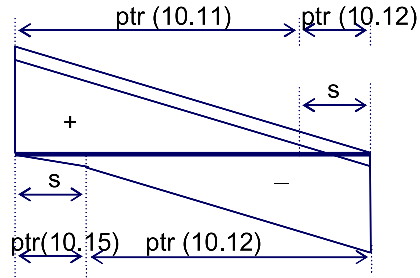
Khi trên dầm chỉ có lực P_1 hoặc P_2 thì

$$M_{n\max+} = P_1\frac{x(l\text{-}x)}{l} \quad khi\ (l-s) \leq x \leq l \tag{10.13}$$

$$V_{n\max+} = P_1\frac{l\text{-}x}{l};\quad khi\ (l-s) \leq x \leq l \tag{10.14}$$

$$V_{n\max-} = -P_2\frac{x}{l}; \quad khi\; s \le x \le l \tag{10.15}$$





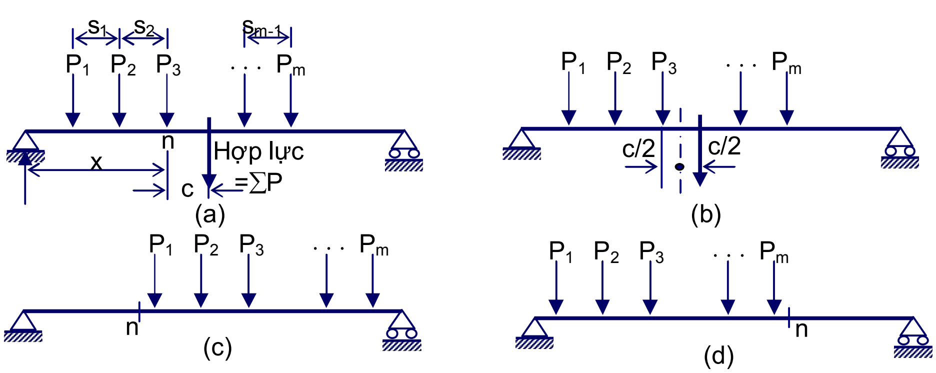
$s \le lP_2/(P_1+P_2) \quad l_{AC} = lP_1/(P_1+P_2)$

$q = 2(P_1+P_2)/l \quad M_C = l_{AC}l_{BC}\left[\frac{q}{2} - \frac{s(P_1+P_2)}{l^2}\right]$

Hình 10.15

10.3.4 Ảnh hưởng của nhiều lực tập trung

Xét tại mặt cắt n (Hình 10.16a), moment sẽ đại cực đại khi một trong các lực tập trung di động đặt vào mặt cắt đó.



Hình 10.16

Ta thử tính cho từng lực sẽ tìm ra lực nào gây ra moment cực đại M_{n+max}. Còn lực cắt dương sẽ đạt cực đại khi tất cả các lực nằm ở bên phải của n (10.16c). Tương tự lực cắt âm sẽ đạt cực đại khi tất cả các lực nằm ở bên trái của n (10.16d).

Ta xét ví trí mà ở đó moment đạt cực đại tuyệt đối trong biểu đồ moment cực đại. Thường ví trí đó ở gần ví trí của hợp lực. Ta giả thiết moment cực đại tuyệt đối đạt được do lực P_3. Ta cần xác định ví trí x sao cho moment uốn M_n đạt cực đại

$$M_n = R_A x - P_1(s_1 + s_2) - P_2 s_2 \tag{10.16}$$

$$R_A = \frac{l - x - c}{l}\sum P \tag{10.17}$$

Giá tri cực đại đạt được khi $\frac{\partial M_n}{\partial x}$ nên

$$\frac{dM_n}{dx} = \frac{\sum P}{l}(l - 2x - c) = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2} - \frac{c}{2} \tag{10.18}$$

10.3.5 Đường ảnh hưởng đối với dầm đơn giản và dàn

Trong các mục 10.3.1-10.3.4 ta đã xét ảnh hưởng của tải di động đối với dầm đơn giản. Trong phần này xem xét đường ảnh hưởng của lực cắt, moment uốn trên dầm và các lực dọc trục trong hệ dàn gối tựa đơn giản. Đường ảnh hưởng được xây dựng để biểu diễn giá trị của một phản ứng nào đó tại một mặt cắt nhất định khi lực đơn vị di động trên dầm. Hình 10.17a biểu diễn các đường ảnh hưởng của lực cắt V_n, moment M_n, phản lực gối tựa R_A và R_b tại mặt cắt n của dầm đơn giản.

Tung độ η tại mặt cắt x bất kỳ bằng giá trị của V_n và M_n khi lực đơn vị đặt đúng ở tọa độ x này. Tung độ dương vẽ xuống dưới. Ta có thể xây dựng đường ảnh hưởng cho dầm đơn giản từ bài toán tĩnh học đơn giản sau. Khi lực đơn vị đặt ở tọa độ x thì phản lực

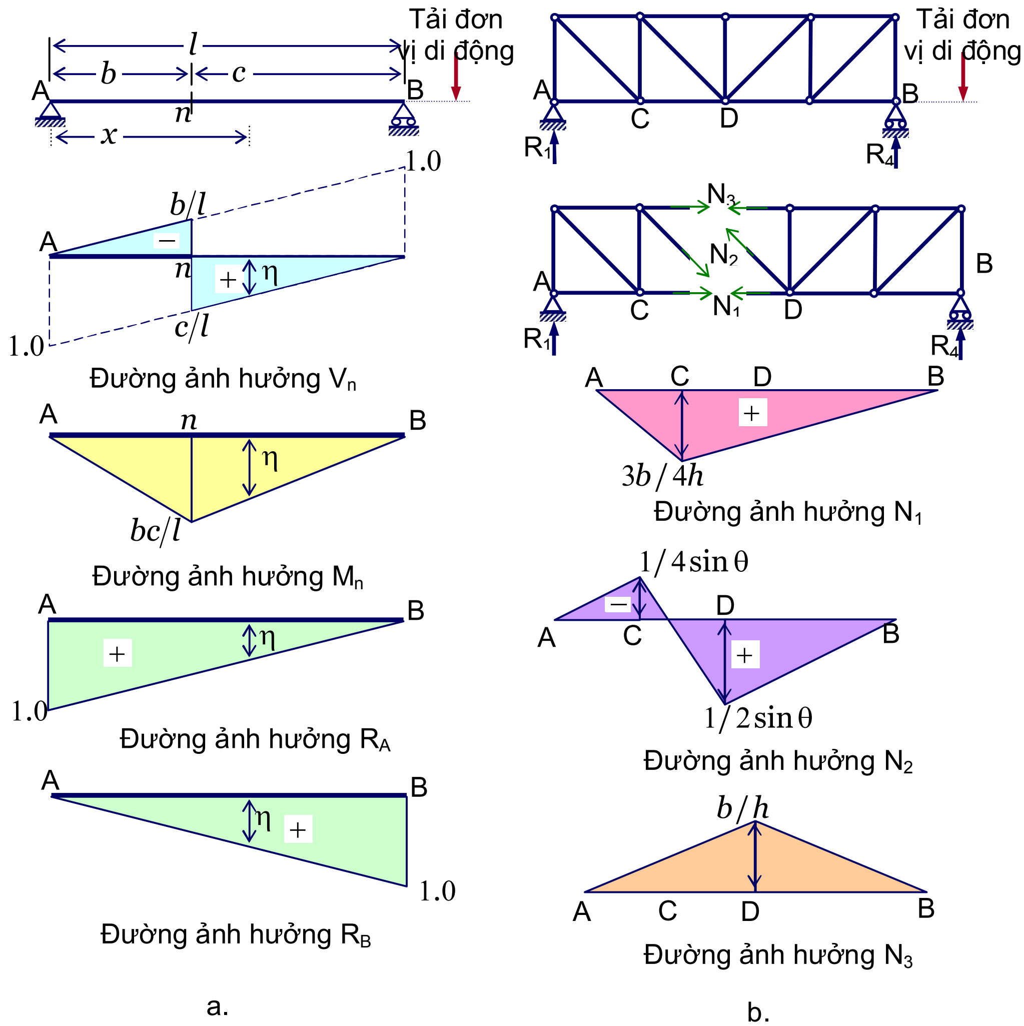
$$R_A = \frac{l - x}{l}$$

Vậy tung độ của các đường ảnh hưởng của R_A và R_B là

$$\eta_{R_A} = \frac{l - x}{l} \quad \eta_{R_B} = \frac{x}{l}$$

Lực cắt tại n bằng với R_A khi lực đơn vị nằm ở ví trị bất kỳ trong đoạn bên phải từ n đến B. Tương tự V_n=-R_B khi lực đơn vị nằm trong đoạn bên trái từ A đến n.

Đối với moment khi lực đơn vị nằm trong đoạn bên phải từ B đến n thì M_n=R_Ab, tương tự khi lực đơn vị nằm trong đoạn bên trái từ A đến n thì M_n=R_Bc.



Hình 10.17

Đối với dàn ta xây dựng đường ảnh hưởng cho nội lực của từng thanh. Ta cũng dựng các đường ảnh hưởng của lực dọc trục từ đường ảnh hưởng của phản lực tại gối đỡ. Khi lực nằm trong đoạn B và D ta có

$$N_1 = R_A \frac{b}{h} \qquad N_2 = \frac{R_A}{\sin\theta} \qquad N_3 = -R_A \frac{2b}{h}$$

Còn khi lực nằm trong khoảng từ C và A

$$N_1 = R_A \frac{3b}{h} \qquad N_2 = -\frac{R_A}{\sin\theta} \qquad N_3 = -R_A \frac{2b}{h}$$

Đường ảnh hưởng của ba lực dọc trục biểu diễn trên Hình 10.17 b

Ví dụ

Tìm moment lớn nhất và lực cắt lớn nhất tại mặt cắt x=0.4l cho trường hợp ba tải di động như trên Hình 10.18a

Ta dùng phép thử tính cho lần lượt lực P_1, P_2 và P_3 đặt vào n ta được

$$M_{n1} = Wl(0,24 \times 0,2 + 0,16 \times 0,8 + 0,08 \times 0,8) = 0,24Wl$$

$$M_{n2} = Wl(0,12 \times 0,2 + 0,24 \times 0,8 + 0,16 \times 0,8) = 0,344Wl$$

$$M_{n3} = Wl(0 \times 0,2 + 0,12 \times 0,8 + 0,24 \times 0,8) = 0,288Wl$$

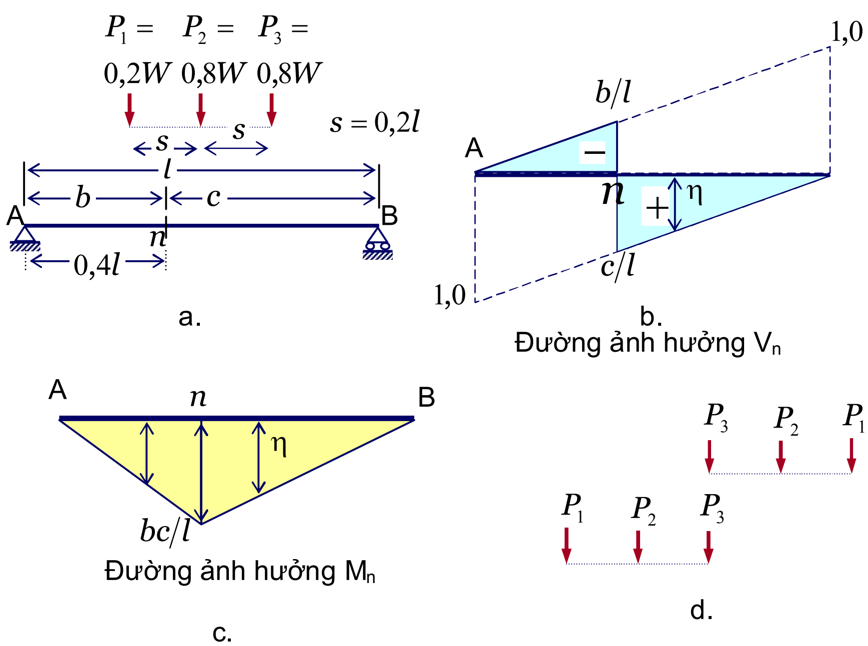
$$M_{n4} = Wl(0,24 \times 0,8 + 0,16 \times 0,8 + 0,08 \times 0,2) = 0,336Wl$$

$$M_{n5} = Wl(0,16 \times 0,8 + 0,24 \times 0,8) = 0,32Wl$$

Như vậy trường hợp thứ hai khi lực P_2 đặt vào điểm n moment đạt cực đại. Lực cắt đạt cực đại tại các trường hợp đạt tải như trên Hình 11.18d

$$V_{\max+} = W(0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.8 + 0.2 \times 0.2) = 0.84W$$

$$V_{\max-} = W(0 \times 0.2 - 0.2 \times 0.8 - 0.4 \times 0.2) = -0.48W$$



Hình 10.18

Kết luận chương 10

Phần lớn các kết cấu trong thực tế là siêu tĩnh, cần phải xác định bậc siêu tĩnh của kết cấu khi ta sử dụng phương pháp độ mềm. Bậc siêu tĩnh phân ra làm các loại sau: siêu tĩnh nội, siêu tĩnh ngoại và hỗn hợp. Những kết cấu đơn giản ta có thể xác định bậc siêu tĩnh dựa vào hình vẽ. Đối với kết cấu phức tạp ta có công thức (10.4), (10.6), (10.7) và (10.8) để xác định bậc siêu tĩnh của hệ dàn phẳng, dàn không gian (khớp nối tại nút), khung phẳng và khung không gian (nối cứng ở nút).

Có hai phương pháp phân tích kết cấu. Phương pháp thứ nhất là phương pháp lực hay còn gọi là phương pháp độ mềm. Phương pháp này giải phóng các liên kết để kết cấu trở thành tĩnh định, sau đó tính tổng chuyển vị và sự sai lệch về chuyển vị sẽ được hiệu chỉnh bằng cách đặt các lực dư vào đúng hướng của các liên kết đã giải phóng. Như vậy ta có được các phương trình tương thích, lời giải của chúng là các lực cần tìm.

Trong phương pháp chuyển vị (phương pháp độ cứng) ta đưa vào các ràng buộc tại các nút. Sau đó tính những lực ràng buộc hạn chế các chuyển vị này. Tiếp theo cho phép chuyển vị tại các hướng có lực ràng buộc sao cho lực ràng buộc triệt tiêu. Như vậy ta có một hệ các phương trình cân bằng, lời giải của hệ là các chuyển vị cần tìm. Nội lực trong kết cấu cũng được xác định bằng phép tổ hợp các tác động của các chuyển vị vừa tính được và của các chuyển vị do lực ngoại lực trên kết cấu đã bị hạn chế dich chuyển.

Số các ràng buộc trong phương pháp độ cứng bằng với số chuyển vị nút độc lập của kết cấu. Số chuyển vị nút độc lập này được gọi là bậc không xác định động học hay đơn giản hơn là bậc tự do của kết cấu. Ta cần phân biệt bậc siêu tĩnh và bậc tự do. Chuyển vị ở đây phải hiểu là cả chuyển vị thẳng và cả góc xoay.

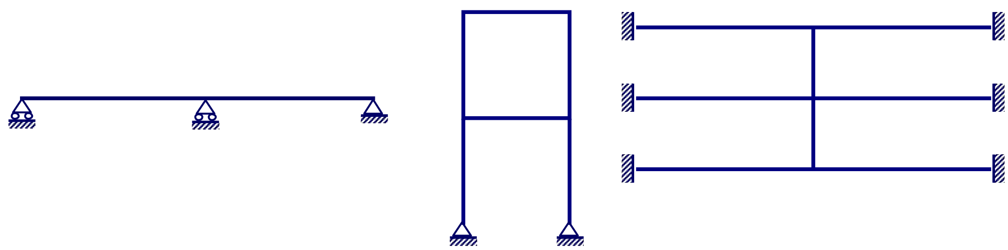
Trong cả hai phương pháp phân tích kết cấu ta đều sử dụng nguyên lý cộng tác dụng cho phép cộng chuyển vị (đáp ứng) do từng tải trọng (chuyển vị) riêng biệt. Nguyên lý này chỉ áp dụng khi vật liệu là đàn hồi (tuân thủ định luật Hooke). Ngoài ra, chuyển vị phải nhỏ so với kích thước của kết cấu để không làm méo mó hình học ban đầu của kết cấu.

Bài tập chương 10

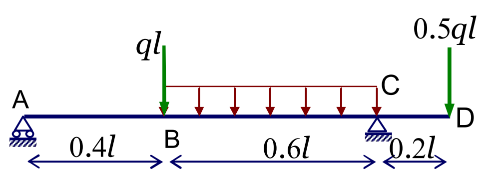
10.1. Với các kết cấu dưới đây

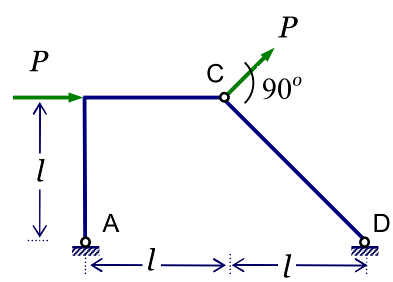
– Xác định bậc siêu tĩnh và đưa ra các giải phóng liên kết thích hợp để kết cấu trở thành tĩnh định

– Xác định bậc tự do và chỉ ra các chuyển vị



10.2.Vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ moment cho các dầm và khung dưới đây.





10.3. Xác định moment uốn cực đại và ví trí của nó trên dầm đơn giản có khẩu độ l khi chịu các trường hợp tải trọng di động sau

a) Hai lực P_1=P_2=W, khoảng cách giữa hai lực là s=0.2l

b) Hai lực P_1=P_2=W, khoảng cách giữa hai lực là s=0.55l

c) Ba lực P_1=P_2=W, P_3=0.5W khoảng cách giữa các lực là s=0.2l

d) Ba lực P_1=0.2W, P_2=P_3=0.8W khoảng cách giữa các lực là s=0.2l

CHƯƠNG 11

Phương pháp lực

11.1 Mô tả phương pháp

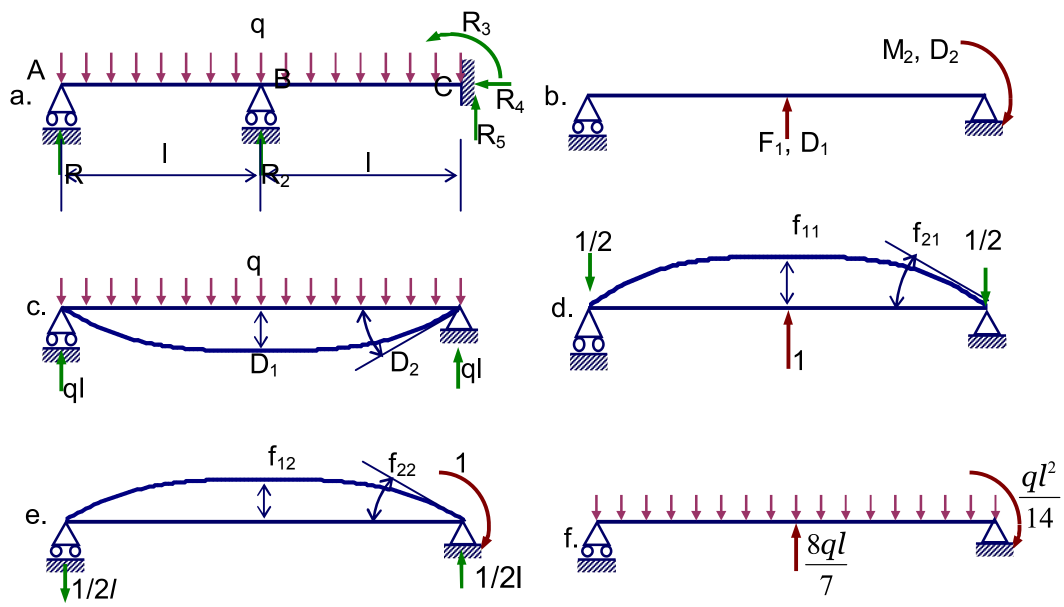
1. Đầu tiên xác định bậc siêu tĩnh. Đưa hệ siêu tĩnh về hệ tĩnh định bằng cách giải phóng một số liên kết, có nghĩa bỏ đi một số phản lực hay nội lực (phải đảm bảo kết cấu ổn định). Số liên kết cần giải phóng bằng số bậc siêu tĩnh. Nói chung những lực cần giải phóng (được gọi là lực dư) cần lựa chọn sao cho hệ kết cấu đã giải phóng thành tĩnh định dễ phân tích nhất. *Chú ý việc lựa chọn này không duy nhất.*
2. Khi giải phóng các liên kết sẽ dẫn đến sự không tương thích về chuyển vị. Do vậy bước thứ hai phải xác định những sai lệch về chuyển vị ở hệ tĩnh định (đã giải phóng liên kết). Ta tính sai lệch về chuyển vị chính ở tọa độ ứng với lực dư đã chọn. Những sai lệch này có thể do ngoại lực, do lún của gối đỡ hay do biến dạng nhiệt.
3. Bước thứ 3 ta cho hệ tĩnh định (đã giải phóng liên kết) chịu lực dư đơn vị, sau đó xác định chuyển vị. Những chuyển vị này có cùng vị trí và hướng như chuyển vị xác định ở bước 2.
4. Ta thấy các lực dư ở những tọa độ đã chọn phải có giá trị sao cho những sai lệch về chuyển vị bị triệt tiêu. Như vậy, ta có các phương trình tổng hợp các chuyển vị do từng lực dư riêng biệt (xác định ở bước thứ 3) cộng với chuyển vị tương ứng của hệ tĩnh định (xác định ở bước thứ 2).
5. Từ đây ta tìm lực trên kết cấu siêu tĩnh ban đầu: chúng là tổng các lực dư và lực trên hệ tĩnh định (đã giải phóng liên kết).

Quy trình này được trình bày qua ví dụ dưới đây

Ví dụ 11.1. Xét ví dụ trên Hình 11.1a dầm ABC ngàm cứng ở đầu C tựa trên hai gối di động tại A và B chịu tải phân bố đều q trên toàn dầm. Độ cứng uốn của dầm là hằng số và bằng EI.

Hệ này có hai bậc siêu tĩnh như vậy cần giải phóng hai lực dư. Có một số lựa chọn: bỏ lực phản lực thẳng đứng ở A và B (Hình 11.2a); hoặc bỏ mô men ở C và thêm khớp nối ở B (Hình 11.2b). Dưới đây ta chọn phương án giải phóng phản lực thẳng đứng ở B và mô men uốn tại C đưa hệ về dầm đơn giản như trên Hình 11.1.b. Ta gọi vị trí và hướng của lực dư và chuyển vị là hệ tọa độ.

Hướng của lực dư F_1 , F_2 ... có thể tùy chọn. Sau đó hướng của chuyển vị phải tương ứng với lực dư. Để thuận tiện ta dùng ký hiệu chỉ số dưới 1, 2, ...n.



Hình 11.1. Ví dụ mô tả phương pháp lực

Trong ví dụ này lực dư và chuyển vị là F_1, M_2 và D_1, D_2 (Hình 11.1b).

Trên sơ đồ hệ tĩnh định này ta xác định chuyển vị D_1 và D_2 dưới tác động của lực phân bố đều (Hình 11.1.c). Chúng chính là sai lệch về chuyển vị, vì trên thực tế (Hình 11.1a) các chuyển vị này phải bằng không. Sử dụng phụ lục 1 ta tính được giá trị của chuyển vị D_1 và D_2.

Sau đó tìm chuyển vị gây ra do tác động của các lực dư đơn vị (như trên Hình 11.1.d và 8.1.e). Cũng sử dụng phụ lục 1 ta có

$$f_{11} = \frac{l^3}{6EI} \quad f_{12} = \frac{l^2}{4EI} \quad f_{21} = \frac{l^3}{4EI} \quad f_{22} = \frac{2l}{3EI} \tag{11.2}$$

Tổng quát f_{ij} là chuyển vị tại tọa độ thứ i do lực đơn vị tại tọa độ thứ j gây ra.

Điều kiện *hình học* trong bài toán này chính là điều kiện chuyển vị thẳng đứng tại điểm B (D_1) và chuyển vị xoay tại điểm C (D_2) bị triệt tiêu.

Chuyển vị tổng cộng tại các tọa độ đã chọn là tổ hợp các tác động của ngoại lực và các lực dư trên hệ tĩnh định đã được giải phóng. Như vậy điều kiện hình học được viết

$$\left.\begin{aligned} D_1 + f_{11}F_1 + f_{12}F_2 = 0 \\ D_2 + f_{21}F_1 + f_{22}F_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11.3}$$

Thế các biểu thức (11.1) của D_1, D_2, và (11.2) của f_{11}, f_{21}, f_{12}, f_{22} vào (11.3) ta có thể tìm được lực dư F_1 và F_2.

11.2 Ma trận độ mềm

Phương trình (11.3) có thể viết dưới dạng ma trận

$$[f]\{F\} = \{-D\} \tag{11.4}$$

trong đó $\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$ $[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$ $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Véc tơ {D} phụ thuộc vào ngoại lực. Ma trận f là các chuyển vị do lực dư đơn vị gây ra, do vậy ma trận f chỉ phụ thuộc vào đặc trưng kết cấu và được gọi là ma trận độ mềm, các phần tử của ma trận này gọi là hệ số ảnh hưởng mềm.

Các thành phần của vectơ lực dư {F} xác định từ phương trình sau

$$\{F\} = [f]^{-1}\{-D\} \tag{11.5}$$

Trong ví dụ ở Hình 11.1

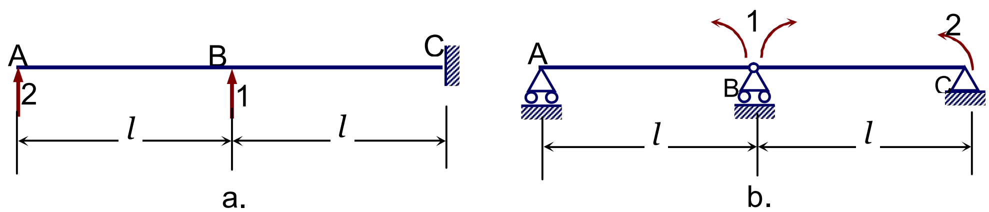
$$\{D\} = \frac{ql^3}{24EI}\begin{Bmatrix} -5l \\ -8 \end{Bmatrix} \quad [f] = \begin{bmatrix} \dfrac{l^3}{6EI} & \dfrac{l^2}{4EI} \\ \dfrac{l^2}{4EI} & \dfrac{2l}{3EI} \end{bmatrix} \quad [f]^{-1} = \frac{12EI}{7l^3}\begin{bmatrix} 8 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix}$$

Giải phương trình (11.5) ta được các lực dư

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [f]^{-1}\{-D\} = \frac{12EI}{7l^3}\frac{ql^3}{24EI}\begin{bmatrix} 8 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 5l \\ 8 \end{Bmatrix} = \frac{ql}{14}\begin{Bmatrix} 16 \\ l \end{Bmatrix}$$

Kết quả ta được hệ lực tác động lên hệ tĩnh định như trên hình (11.1.f). Sau đó bằng phương pháp thông thường ta có thể tìm được nội lực và phản lực trong thanh.

Chú ý ma trận độ mềm phụ thuộc vào hệ lực dư ta chọn. Cũng với Ví dụ 11.1 này ta chọn hệ lực dư khác



Hình 11.2. Hệ lực dư khác nhau cho cùng một kết cấu siêu tĩnh

Với trình tự như đã trình bày cho hai hệ tọa độ này ta có véc tơ chuyển vi và ma trận độ mềm và lực dư như sau

(a) $\{D\} = -\dfrac{ql^4}{24EI}\begin{Bmatrix}48\\17\end{Bmatrix}$; $[f] = \dfrac{l^3}{6EI}\begin{bmatrix}16 & 5\\5 & 2\end{bmatrix}$; $[f]^{-1} = \dfrac{6EI}{7l^3}\begin{bmatrix}2 & -5\\-5 & 16\end{bmatrix}$; $F = \dfrac{ql}{28}\begin{Bmatrix}11\\32\end{Bmatrix}$.

(b) $\{D\} = \dfrac{ql^3}{24EI}\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}$; $[f] = \dfrac{l}{6EI}\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$; $[f]^{-1} = \dfrac{6EI}{7l}\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 4\end{bmatrix}$; $F = -\dfrac{ql^2}{28}\begin{Bmatrix}3\\2\end{Bmatrix}$.

Đáp ứng của kết cấu (phản lực và nội lực) xác định bằng tổ hợp ảnh hưởng của ngoại lực và lực dư

$$A_i = A_{si} + \left(A_{ui1}F_1 + A_{ui2}F_2 + \Lambda + A_{uin}F_n\right) \qquad (11.6)$$

trong đó A_i – đáp ứng bất kỳ (có thể là phản lực tại gối đỡ, lực cắt, lực dọc trục, mô men xoắn và mô men uốn) tại mặt cắt nào đó của kết cấu thực.

A_{si} - cũng là đáp ứng trên nhưng tính cho kết cấu đã giải phóng liên kết dưới tác động của ngoại lực.

A_{ui1}, A_{ui2},...,A_{uin}, - đáp ứng tương ứng do lực đơn vị tác động tại các tọa độ 1,2, ...,n với kết cấu đã giải phóng liên kết.

F_1, F_2, ..., F_n – các lực dư tác động vào kết cấu đã giải phóng.

Dưới dạng ma trận

$$\{A\}_{m\times 1} = \{A_s\}_{m\times 1} + [A_u]_{m\times n}\{F\}_{n\times 1} \tag{11.7}$$

trong đó $\{A\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \Lambda \\ A_n \end{Bmatrix}, \{A_s\} = \begin{Bmatrix} A_{s1} \\ A_{s2} \\ \Lambda \\ A_{sn} \end{Bmatrix} \quad [A_u] = \begin{bmatrix} A_{u11} & A_{u12} & A_{u1n} \\ A_{u21} & A_{u22} & A_{u2n} \\ & & \\ A_{um1} & A_{um2} & A_{umn} \end{bmatrix}$

Chú ý đơn vị của các thành phần của ma trận độ mềm không nhất thiết đồng nhất vì chúng có thể đại diện cho chuyển vị thẳng có thể là góc xoay.

Ta tính phản lực tại gối đỡ cho Ví dụ 11.1. Từ Hình 11.1 c,d và e ta có được các vectơ A_s và ma trận A_u như sau

$$R_{As} = R_{Cs} = ql \Rightarrow \{R_s\} = \begin{Bmatrix} R_{As} \\ R_{bs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ql \\ ql \end{Bmatrix}$$

$$R_{A1} = R_{C1} = -\frac{1}{2};\ R_{A2} = -R_{C2} = -\frac{1}{2l};$$

$$\Rightarrow [R_u] = \begin{bmatrix} R_{Au1} & R_{Au2} \\ R_{Bu1} & R_{Bu2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1/l \\ 1 & -1/l \end{bmatrix};$$

Sử dụng (11.7) ta tính được

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_A \\ R_C \end{Bmatrix} = \{R_s\} + [R_u]\{F\} = \begin{Bmatrix} ql \\ ql \end{Bmatrix} - \frac{ql}{28}\begin{bmatrix} 1 & 1/l \\ 1 & -1/l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 16 \\ l \end{Bmatrix} = \frac{ql}{28}\begin{Bmatrix} 11 \\ 13 \end{Bmatrix}$$

$$R_A = \frac{11ql}{28}; R_C = \frac{13ql}{28}$$

11.3 Giải bài toán với các trường hợp đặt tải khác nhau

Khi có p trường hợp tải khác nhau tác động lên kết cấu ta có thể sử dụng phương trình (11.3) để tìm lực dư mà không cần tính lại ma trận độ mềm, ta tổ hợp thành phương trình ma trận

$$[F]_{n\times p} = [f]^{-1}_{n\times n}[\Delta - D]_{n\times p} \tag{11.8}$$

Mỗi cột của [F] và [D] ứng với mỗi trường hợp tải. Đáp ứng của hệ (phản lực và nội lực) có thể tìm từ phương trình ma trận tương đương với phương trình (11.7)

$$[A]_{m\times p} = [A]_{m\times p} + [A_u]_{m\times n}[F]_{n\times p} \tag{11.9}$$

11.3.1 Ảnh hưởng của chuyển vị tại nút: ảnh hưởng của môi trường

Phương pháp lực có thể dùng để giải các kết cấu chịu những ảnh hưởng khác ngoài lực tác động. Ví dụ như sự di chuyển của gối đỡ (do gối đỡ bị lún, hay do sự thay đổi nhiệt không đều của gối đỡ) gây ra nội lực.

Nếu kết cấu bị hạn chế chuyển vị cũng gây ra nội lực. Ví dụ như khi nhiệt độ thay đổi trong dầm không đồng đều.

Co ngót của bê tông cũng gây ra nội lực trong kết cấu như hiệu ứng thay đổi nhiệt. Hiệu ứng của bê tông dư ứng lực cũng gây ra nội lực.

11.3.2 Ảnh hưởng của chuyển vị tại tọa độ

Khi gối đỡ chuyển vị theo những tọa độ lực dư mà ta đã chọn thì hệ phương trình (11.3) sẽ thay đổi. Điều kiện hình học có dạng

$$\left.\begin{aligned} D_1 + f_{11}F_1 + f_{12}F_2 = \Delta_1 \\ D_2 + f_{21}F_1 + f_{22}F_2 = \Delta_2 \end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

Để tìm lực dư ta có phương trình ở dạng ma trận

$$\{F\} = [f]^{-1}\{\Delta - D\}, \text{ với } \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Lambda \\ \Delta_n \end{Bmatrix} \tag{11.11}$$

Khi đó phương trình (11.8) sẽ thành

$$[F]_{n\times p} = [f]^{-1}_{n\times n}[\Delta - D]_{n\times p} \tag{11.12}$$

11.4 Năm bước giải của phương pháp lực

Bước 1. Chọn liên kết cần giải phóng và xác định hệ tọa độ. Đồng thời xác định $[A]_{m\times n}$ của các đáp ứng cần tìm và quy ước dấu nếu cần.

Bước 2. Xác định $[D]_{n\times p}$ $[\Delta]_{n\times p}$ và $[A_s]_{m\times p}$ do ngoại lực tác động lên hệ tĩnh định (hệ kết cấu đã giải phóng liên kết).

Bước 3. Thiết lập ma trận $[f]_{n\times n}$ và $[A_u]_{m\times p}$ do các lực dư đơn vị tác động lên hệ tĩnh định.

Bước 4. Tìm lực dư $[F]_{n\times p}$ từ phương trình hình học.

$$[f]_{n\times n}[F]_{n\times p} = [\Delta - D]_{n\times p}$$

Bước 5. Tìm các đáp ứng từ tổ hợp.

$$[A]_{m\times p} = [A_s]_{m\times p} + [A_u]_{m\times n}[F]_{n\times p}$$

Ở đây có các ký hiệu:

n,p,m - số lực dư, số trường hợp tải, số đáp ứng (phản lực hay nội lực)

[A] – đáp ứng cần xác định - lời giải của bài toán

$[A_s]$ – đáp ứng do ngoại lực tác động lên kết cấu đã giải phóng liên kết

$[A_u]$ – đáp ứng do lực dư đơn vị tác động riêng biệt tại các tọa độ lên kết cấu đã giải phóng liên kết

[D] - chuyển vị do lực tác động gây ra tại các tọa độ. Chuyển vị này cần được triệt tiêu bằng các lực dư

[Δ] - chuyển vị cho trước

[f] – ma trận độ mềm

Sau bước thứ 3 các ma trận cần thiết để giải bài toán đã được xác định. Hai bước còn lại đơn thuần là các phép tính đại số.

Ví dụ 11.2. Xét ví dụ ở Hình 11.1 cho 2 trường hợp gối đỡ di chuyển Hình 11.3:

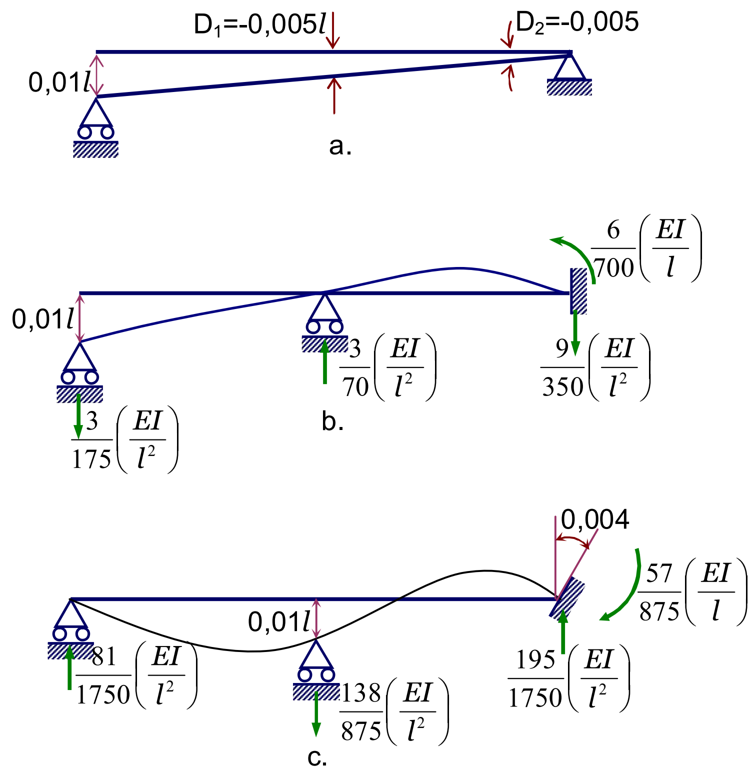
(a) Điểm A lún xuống một đoạn là l/100; (b) Điểm B lún xuống một đoạn là l/100 và điểm C xoay theo chiều kim đồng hồ một góc =0,004 rad.

Lời giải: Trường hợp (a) với hệ tọa độ như Hình 11.1b sự lún của gối A không ứng với tọa độ lực dư nên Δ=0, sai lệch về chuyển vị (Hình 11.3a) xác định dễ dàng:

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} -0{,}005l \\ -0{,}005 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Trường hợp (b) chuyển vị cho trước này không gây ra sai lệch D=0, các chuyển vị cho trước này trùng với tọa độ lực dư nên

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} -0{,}01l \\ 0{,}004 \end{Bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad [\Delta - D] = \begin{Bmatrix} 0{,}005l & -0{,}01l \\ 0{,}005 & 0{,}004 \end{Bmatrix}$$



Hình 11.3. Ví dụ tính toán với chuyển vị cho trước

Thế vào phương trình (11.12) ta có

$$[F]=\frac{12EI}{7l^3}\begin{bmatrix}8 & -3l\\ -3l & 2l^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}005l & -0{,}01l\\ 0{,}005 & 0{,}004\end{bmatrix}$$

$$=\frac{12EI}{7l^3}\begin{bmatrix}0{,}025l & -0{,}092l\\ -0{,}005l^2 & 0{,}038l^2\end{bmatrix}$$

Để tính phản lực tại gối đỡ ta sử dụng ma trận R_u đã tính ở ví dụ 1 vì ta vẫn giữ nguyên hệ tọa độ đã chọn. Còn ma trận R_s=0, nên ta có

$$[R]=\begin{bmatrix}R_{Aa} & R_{Ab}\\ R_{Ca} & R_{Cb}\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{12EI}{7l^2}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{l}\\ 1 & -\frac{1}{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}025 & -0{,}092\\ -0{,}005l & 0{,}038l\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{12EI}{7l^2}\begin{bmatrix}0{,}01 & -0{,}027\\ 0{,}015 & 0{,}065\end{bmatrix}$$

$$R_{A(a)} = -\frac{3}{175}\frac{EI}{l^2}; R_{A(b)} = \frac{81}{1750}\frac{EI}{l^2}; R_{C(a)} = -\frac{9}{350}\frac{EI}{l^2}; R_{C(b)} = \frac{195}{1750}\frac{EI}{l^2}$$

Ví dụ 11.3. Phân tích dầm liên tục độ cứng không đổi EI (Hình 11.4) với các trường hợp tải: a. Tải phân bố đều q (a); b. Gối A lún một đơn vị (d). c. Gối B lún một đơn vị (e).

Để đưa kết cấu thành tĩnh định ta có thể giải phóng liên kết bằng cách đưa vào các khớp ở các gối đỡ ở giữa. Bằng cách này ta giải phóng hai mô men bằng nhau về độ lớn nhưng ngược hướng tác động tại hai phía của gối đỡ đưa kết cấu về một loạt các dầm đơn giản. Những mô men uốn đó được gọi là mô men liên kết.

Sự sai lệch về chuyển vị là các góc xoay tại các điểm nối của các dầm liền kề -góc giữa các đường tiếp tuyến của hai dầm liền kề (Hình 11.4.b).

Bước 1. Thực hiện trên Hình 11.4b. Phản lực gối đỡ có: R_A, R_B, R_C, R_D, R_E.

Bước 2. Sử dụng phương trình 11.12 tìm sai lệch chuyển vị cho cả 3 trường hợp

– Trường hợp (a) tải phân bố (Hình 11.4c) sử dụng Phụ lục 1 ta tính được

$$\{D\} = \frac{ql^3}{12EI}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} \text{ và } \{R_{Sa}\}^T = \begin{Bmatrix}\frac{ql}{2} & ql & ql & ql & \frac{ql}{2}\end{Bmatrix}$$

– Trường hợp gối A lún xuống một đơn vị (Hình 11.4c) và trường hợp gối B lún xuống 1 đơn vị (Hình 11.4d) đều không ứng với tọa độ của lực dư đã chọn nên véctơ Δ bằng không, ta tính được chuyển vị sai lệch như sau

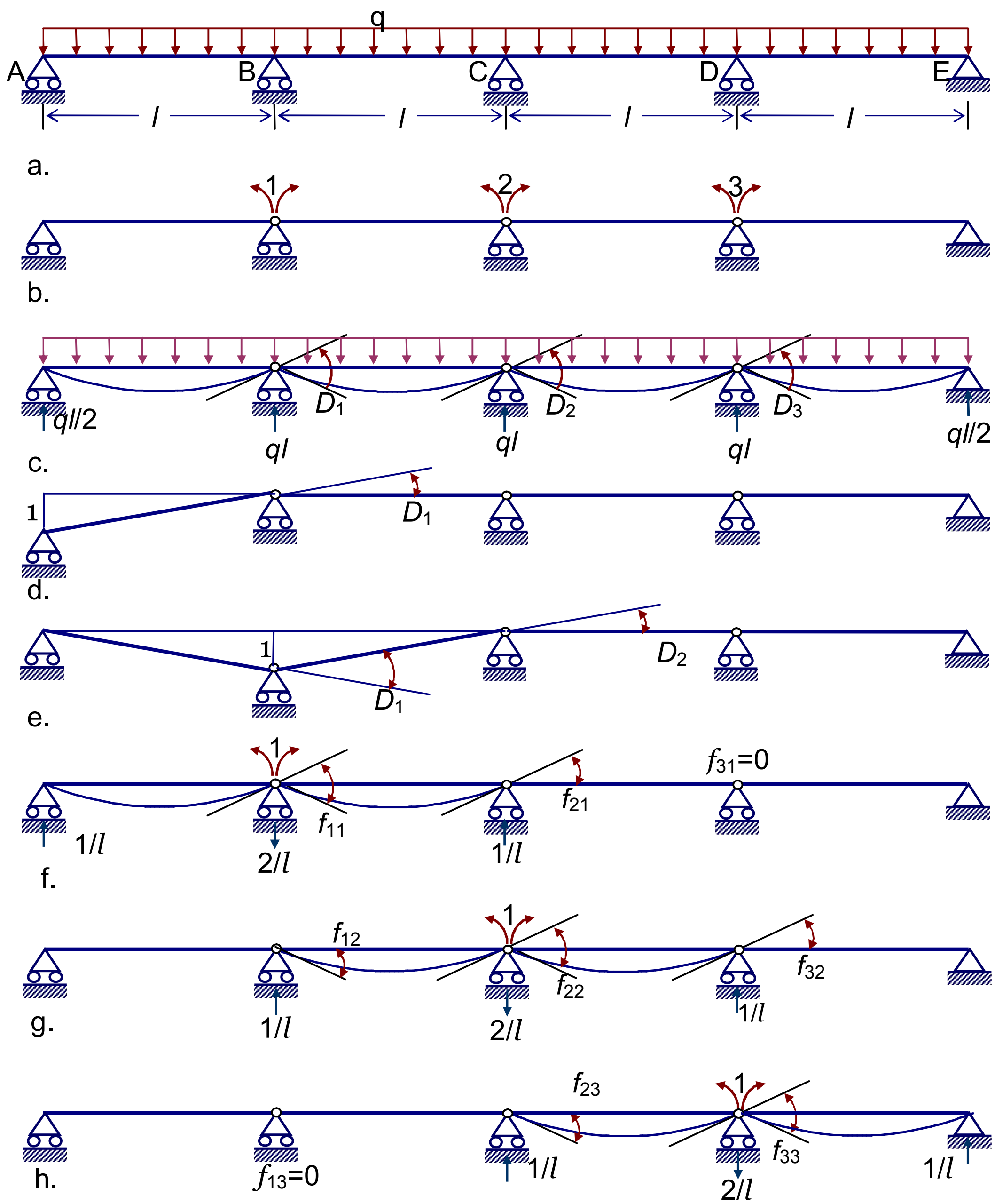
a. $\{D\} = \frac{1}{l}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix};$

b. $\{D\} = \frac{1}{l}\begin{Bmatrix}-2\\1\\0\end{Bmatrix} \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$

cả hai trường hợp b, c vectơ phản lực $\{R_{Sb}\}=0$ và $\{R_{sc}\}=0$

Vậy ma trận $[\Delta\text{-}D]$ và ma trận $[A_s]$ có dạng

$$[\Delta - D] = -\begin{bmatrix} \frac{ql^3}{12EI} & \frac{1}{l} & -\frac{2}{l} \\ \frac{ql^3}{12EI} & 0 & \frac{1}{l} \\ \frac{ql^3}{12EI} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [A_s] = \begin{bmatrix} ql/2 & 0 & 0 \\ ql & 0 & 0 \\ ql & 0 & 0 \\ ql & 0 & 0 \\ ql/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Hình 11.4. Giải phóng liên kết cho hệ dầm liên tục bằng các khớp

Bước 3. Thiết lập ma trận [f] và ma trận [A_u]. Đặt từng cặp lực dư là cặp mô men có độ lớn bằng 1 và ngược hướng vào các điểm B, C, D tương ứng, sử dụng Phụ lục 1 ta tính các thành phần của ma trận độ mềm (Hình 11.4 f,g,h)

$$[f]=\frac{l}{6EI}\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow [f]^{-1}=\frac{3EI}{28l}\begin{bmatrix}15 & -4 & 1\\ -4 & 16 & -4\\ 1 & -4 & 15\end{bmatrix}$$

Cũng trên hình (11.4f,g,h) ta thiết lập ma trận [A_u]

$$[A_u]=\begin{bmatrix}1/l & 0 & 0\\ -2/l & 1/l & 0\\ 1/l & -2/l & 1/l\\ 0 & 1/l & -2/l\\ 0 & 0 & 1/l\end{bmatrix}$$

Bước 4. Từ phương trình (11.12) ta tính được các mô men uốn tại các gối B, C, D. Mỗi cột trong ma trận F ứng từng trường hợp tải đã nêu trong ví dụ

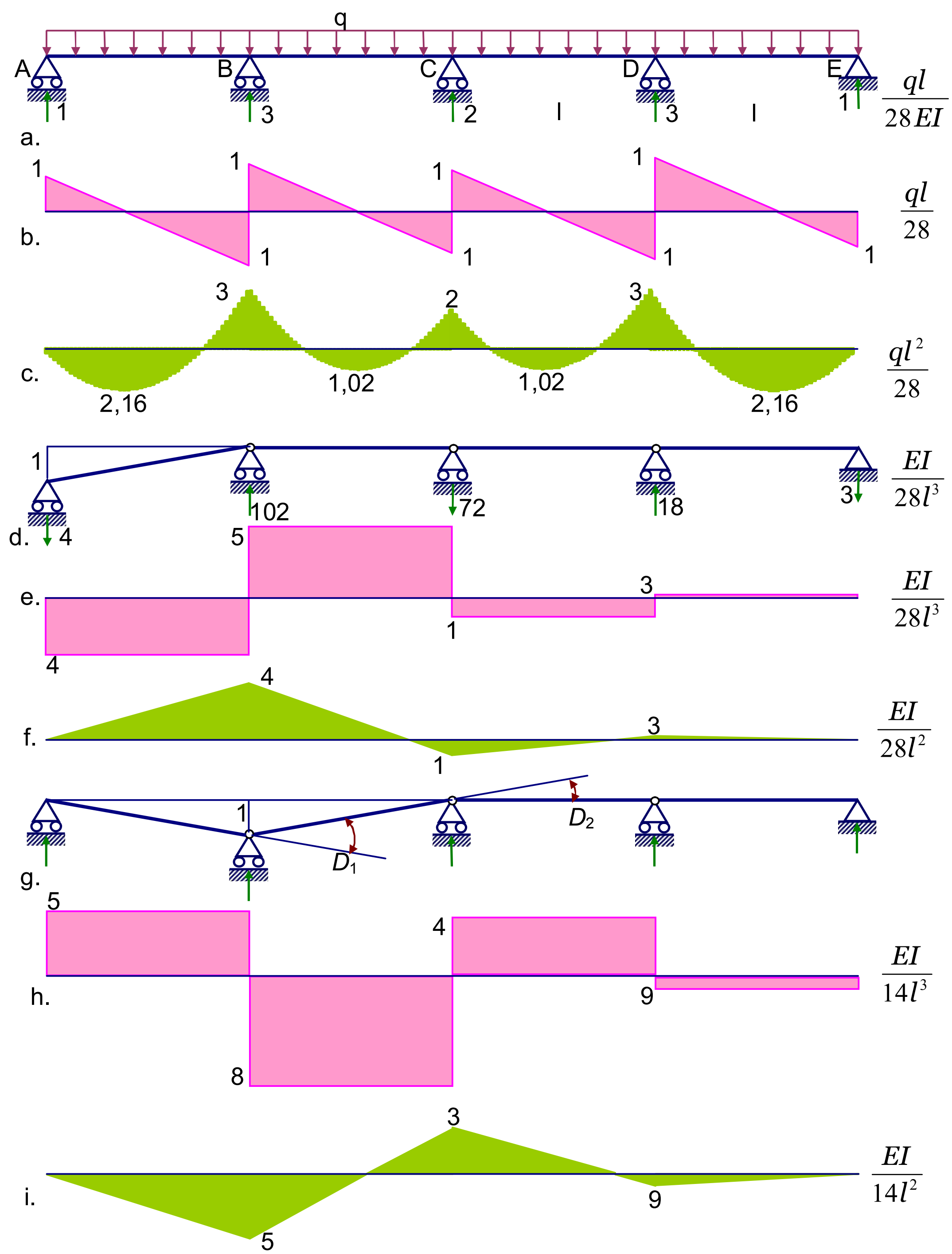
$$[F]=-\frac{3EI}{28l}\begin{bmatrix}15 & -4 & 1\\ -4 & 16 & -4\\ 1 & -4 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{ql^3}{12EI} & \frac{1}{l} & -\frac{2}{l}\\ \frac{ql^3}{12EI} & 0 & \frac{1}{l}\\ \frac{ql^3}{12EI} & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3ql^2}{28} & -\frac{45EI}{28l^2} & \frac{51EI}{14l^2}\\ -\frac{ql^2}{14} & \frac{3EI}{7l^2} & -\frac{18EI}{7l^2}\\ -\frac{3ql^2}{28} & -\frac{3EI}{28l^2} & \frac{9EI}{14l^2}\end{bmatrix}.$$

Bước 5. Tính phản lực tại các gối R_A, R_B, R_C, R_D, R_E sử dụng phương trình (11.9)

$$[A]=\begin{bmatrix}ql/2 & 0 & 0\\ ql & 0 & 0\\ ql & 0 & 0\\ ql & 0 & 0\\ ql/2 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/l & 0 & 0\\ -2/l & 1/l & 0\\ 1/l & -2/l & 1/l\\ 0 & 1/l & -2/l\\ 0 & 0 & 1/l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{3ql^2}{28} & -\frac{45EI}{28l^2} & \frac{51EI}{14l^2}\\ -\frac{ql^2}{14} & \frac{3EI}{7l^2} & -\frac{18EI}{7l^2}\\ -\frac{3ql^2}{28} & -\frac{3EI}{28l^2} & \frac{9EI}{14l^2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}R_{A1} & R_{A2} & R_{A3}\\ R_{B1} & R_{B2} & R_{B3}\\ R_{C1} & R_{C2} & R_{C3}\\ R_{D1} & R_{D2} & R_{D3}\\ R_{E1} & R_{E2} & R_{E3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{28}ql & -\frac{45EI}{28l^3} & \frac{51EI}{14l^3}\\ \frac{32}{28}ql & \frac{102EI}{28l^3} & -\frac{138EI}{14l^3}\\ \frac{26}{28}ql & -\frac{72EI}{28l^3} & \frac{132EI}{14l^3}\\ \frac{32}{28}ql & \frac{18EI}{28l^3} & -\frac{54EI}{14l^3}\\ \frac{11}{28}ql & -\frac{3EI}{28l^3} & \frac{9EI}{14l^3}\end{bmatrix}$$

Phản lực, biểu đồ lực cắt và mô men cho trên Hình 11.5.

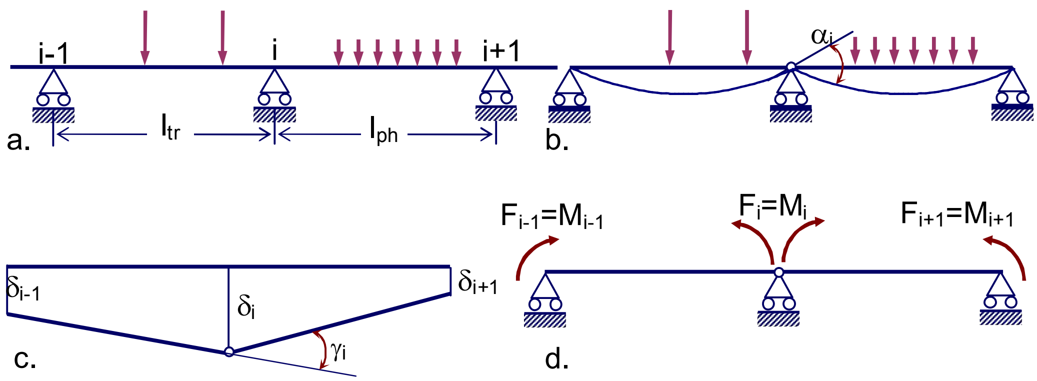


Hình 11.5. Biểu đồ nội lực cho dầm liên tục ví dụ 11.2

11.5 Phương trình ba mô men

Trong thực tế thiết kế ta thường gặp bài toán phân tích dầm liên tục chịu lực cắt với các gối đỡ bị lún. Đơn giản hóa phương pháp lực áp dụng cho trường hợp cụ thể này dẫn đến phương trình ba mô men.

Trên Hình 11.6 ta xét 2 nhịp dầm liền kề của dầm liên tục. Ta xét nhịp dầm bên trái và bên phải của gối đỡ thứ i với độ dài l_{tr} và l_{ph}, độ cứng EI_{tr} và EI_{ph}. Các gối đỡ là i-1, i, i+1 độ lún của chúng ký hiệu là δ_{i-1}, δ_i, δ_{i+1}.



Hình 11.6. Thiết lập phương trình cho gối i

Ta đưa về hệ tĩnh định bằng cách đưa các khớp tại gối đỡ sao cho mỗi nhịp dầm làm việc như một dầm đơn giản (Ví dụ 11.3). Qui ước dấu như trong Ví dụ 11.3.

Sự sai lệch về chuyển vị là góc xoay tương đối của các nhịp dầm liền kề, như trên Hình 11.6b và c.

$$D_i = \alpha_i - \gamma_i \tag{11.13}$$

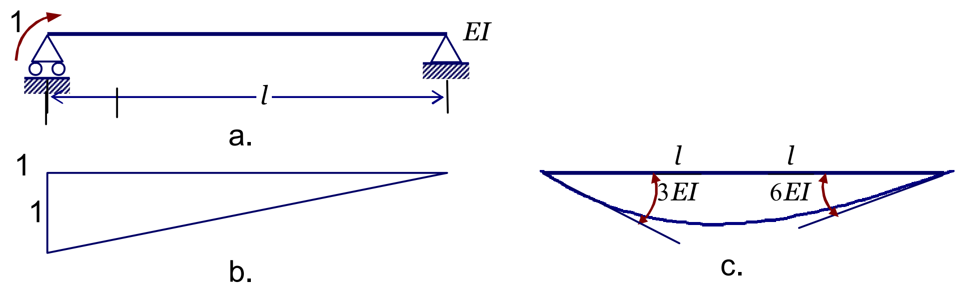
Các lực dư $\{F_i\}$ chính là các mô men liên kết $\{M_i\}$, giá trị của chúng phải đảm bảo làm sao cho góc xoay bị triệt tiêu. Ta có phương trình thỏa mãn điều kiện liên tục tại điểm i.

$$D_i + f_{i,i-1}F_{i-1} + f_i F_i + f_{i,i+1}F_{i+1} = 0 \tag{11.14}$$

các hệ số f_i là các hệ số độ mềm của kết cấu đã giải phóng. Trên Hình 11.7a trình bày dầm đơn giản chịu mô men đơn vị tại một đầu và 11.7b là biểu đồ mô men còn 11.7c là đường cong chuyển vị và các góc xoay tại A và B (Phụ lục 1).

Áp dụng kết quả này ta có được các hệ số độ mềm

$$f_{i,i-1} = \frac{l_{tr}}{6EI_{tr}}, \quad f_{i,i} = \frac{l_{tr}}{3EI_{tr}} + \frac{l_{ph}}{3EI_{ph}}, \quad f_{i,i+1} = \frac{l_{ph}}{6EI_{ph}}.$$



Hình 11.7. Các hệ số độ mềm

Như vậy phương trình 11.14 có dạng

$$M_{i-1}\frac{l_{tr}}{EI_{tr}} + 2M_i\left(\frac{l_{tr}}{EI_{tr}} + \frac{l_{ph}}{EI_{ph}}\right) + M_{i+1}\frac{l_{ph}}{EI_{ph}} = -6D_i \tag{11.15}$$

Khi độ cứng trên toàn dầm không đổi ta có phương trình ba mô men

$$M_{i-1}l_{tr} + 2M_i\left(l_{tr} + l_{ph}\right) + M_{i+1}l_{ph} = -6EID_i \tag{11.16}$$

Viết phương trình này cho từng gối đỡ được hệ phương trình, lời giải của nó là các mô men cần tìm. Góc xoay D_i có thể tính từ phương trình (11.13) với góc γ_i xác định từ Hình 11.6c

$$\gamma_i = \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{l_l} + \frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{l_r} \tag{11.17}$$

và góc α_i có thể xác định bằng phụ lục 1.

Ví dụ 11.4. Tìm biểu đồ mô men cho dầm trên Hình 11.8a với hai trường hợp tải

a. Lực thẳng đứng như trên Hình 11.8a.
b. Gối đỡ B và C lún xuống các b/100 và b/200.

Độ cứng của dầm không đổi và bằng EI.

Phương trình ba mô men áp dụng cho nút A và B để tìm mô men tại đó, tại điểm C ta có thể dễ dàng tìm được trường hợp a. $M_C = \frac{qb^2}{2}$, trường hợp b. M_C=0.

Đầu tiên ta tìm sai lệch về chuyển vị theo công thức (11.13).

Chú ý trường hợp a. γ=0, còn trường hợp b. α=0. Dùng phụ lục 1 và công thức 8.17 ta tìm được

$$D_a = \begin{Bmatrix} 5{,}208\dfrac{qb^3}{EI} \\ 5{,}208\dfrac{qb^3}{EI} \end{Bmatrix} \; ; \; D_b = \begin{Bmatrix} 0{,}002 \\ -0{,}00325 \end{Bmatrix}$$

Dùng phương trình 8.15 ta có đối với trường hợp a

$$\frac{b}{EI}(10M_1 + 5M_2) = -6 \times 5{,}208\frac{qb^3}{EI}$$

$$\frac{b}{EI}\left(5M_1 + 18M_2 - 4\frac{qb^2}{2}\right) = -6 \times 5{,}208\frac{qb^3}{EI}$$

và cho trường hợp b

$$\frac{b}{EI}(10M_1 + 5M_2) = -6 \times 0{,}002$$

$$\frac{b}{EI}(5M_1 + 18M_2) = 6 \times 0{,}00325$$

Có thể viết chung dưới dạng ma trận

$$\frac{b}{EI}\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 18 \end{bmatrix}[M] = \begin{bmatrix} -31{,}25\dfrac{qb^3}{EI} & -0{,}0120 \\ -29{,}25\dfrac{qb^3}{EI} & 0{,}0195 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} -2{,}686qb^2 & -2{,}02\dfrac{EI}{1000b} \\ -0{,}879qb^2 & 1{,}65\dfrac{EI}{1000b} \end{bmatrix}$$

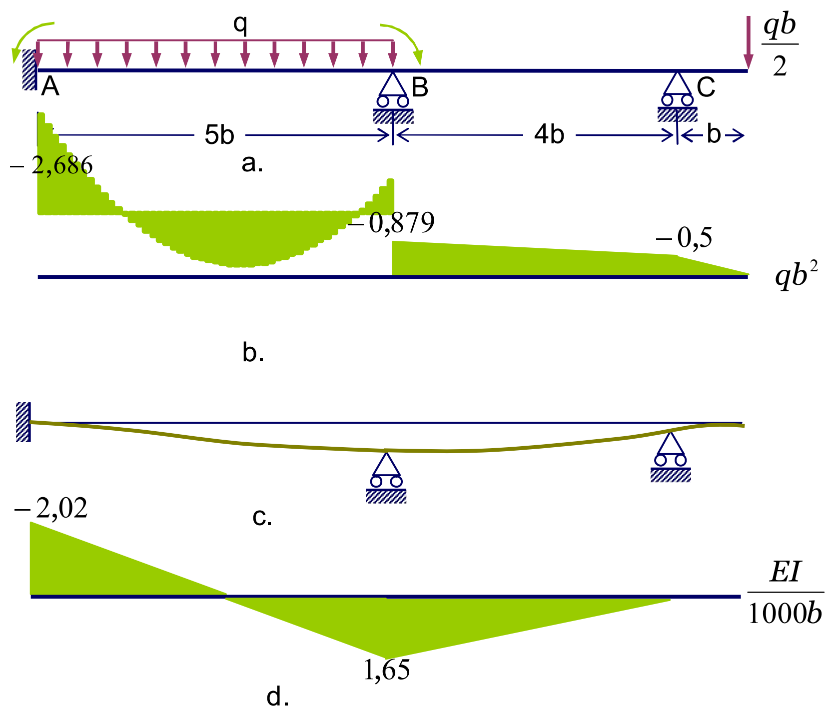
Biểu đồ mô men cho trên Hình 11.8 b và c.

Chú ý trường hợp (a) khi vẽ biểu đồ mô men để tìm phương trình của đường parabol cho đoạn dầm chịu lực phân bố ta phải tìm phản lực tại điểm A. Phản lực đó có thể tìm được vì ta đã biết mô men tại A và tại B, cụ thể ta có phương trình

$$M_B = M_A + \frac{q(5b)^2}{2} - 5bR_A \Rightarrow R_A = \frac{M_A}{5b} - \frac{M_B}{5b} + \frac{5}{2}qb$$

Và phương trình parabol biểu diễn biểu đồ mô men trong đoạn AB có dạng

$$M = -M_A + \frac{qx^2}{2} - R_A x$$



Hình 11.8. Biểu đồ nội lực cho dầm trong ví dụ 11.4

Có thể vẽ theo cách đơn giản hơn: ta đặt giá trị mô men tại A và B tạm thời nối lại bằng đường thẳng, trên đoạn AB có lực phân bố đều nên tại điểm giữa của đoạn thẳng vừa nối ta hạ xuống một đoạn là $ql^2/8$, nối ba điểm bằng một được parabol ta được biểu đồ mô men cho đoạn AB.

Đoạn BC và CD có thể dễ dàng vẽ được biểu đồ mô men vì không có lực tập trung cũng như lực phân bố nên biểu đồ mô men là các đường thẳng nối các điểm mà ta đã có giá trị mô men. Tương tự như vậy trường hợp b nội lực sinh ra do sự lún của các gối đỡ. Ta đã tính được mô men tại A và B, còn tại C mô men bằng không. Biểu đồ mô men là những đường thẳng nối các điểm với giá trị mô men đã biết.

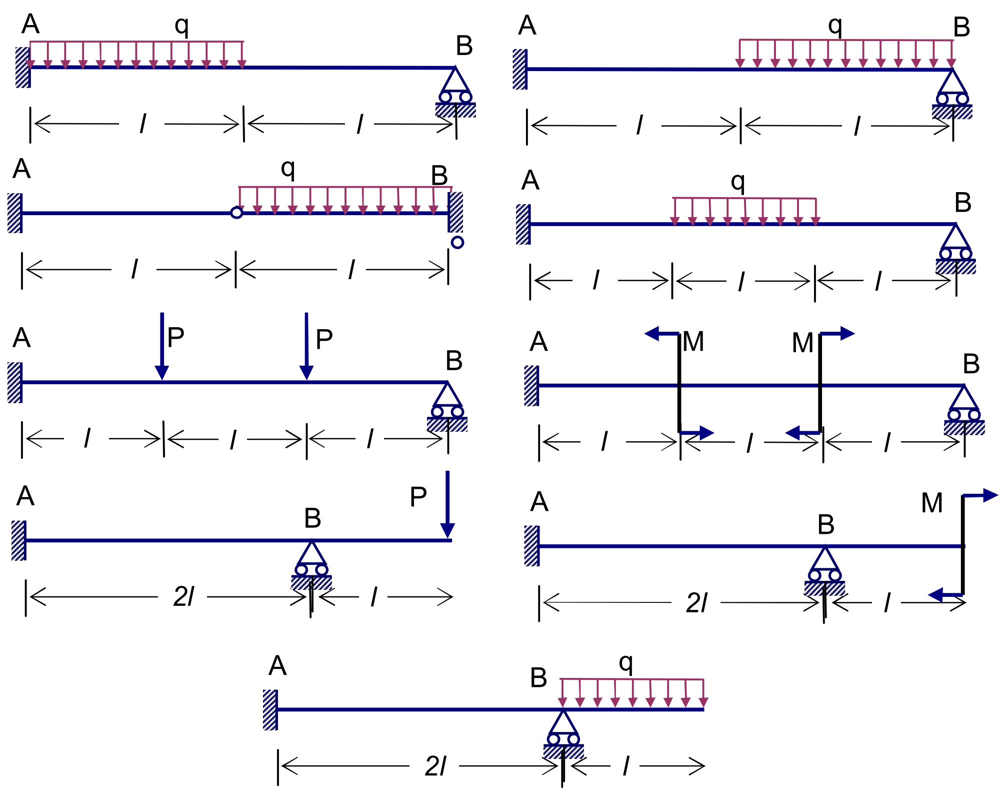
Kết luận chương 11

Phương pháp lực có thể áp dụng cho kết cấu bất kỳ chịu tải trọng môi trường.

- Lời giải của phương trình tương thích được xây dựng một cách trực tiếp cho ta các lực cần tìm.
- Số phương trình bằng với số lực dư bằng với bậc siêu tĩnh
- Phương pháp lực không thích hợp khi dùng máy tính vì việc lựa chọn lực dư làm ẩn số không duy nhất.

Bài tập chương 11

11.1. Dùng phương pháp lực tìm phản lực tại các liên kết và vẽ biểu đồ M và Q cho các trường hợp dầm siêu tĩnh trong các hình vẽ sau. Độ cứng của các dầm không thay đổi và bằng EI

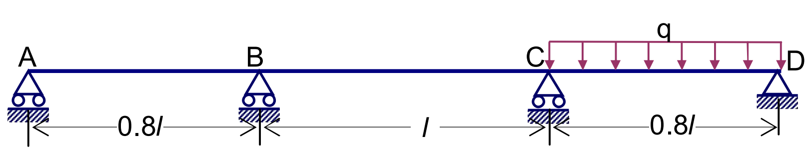


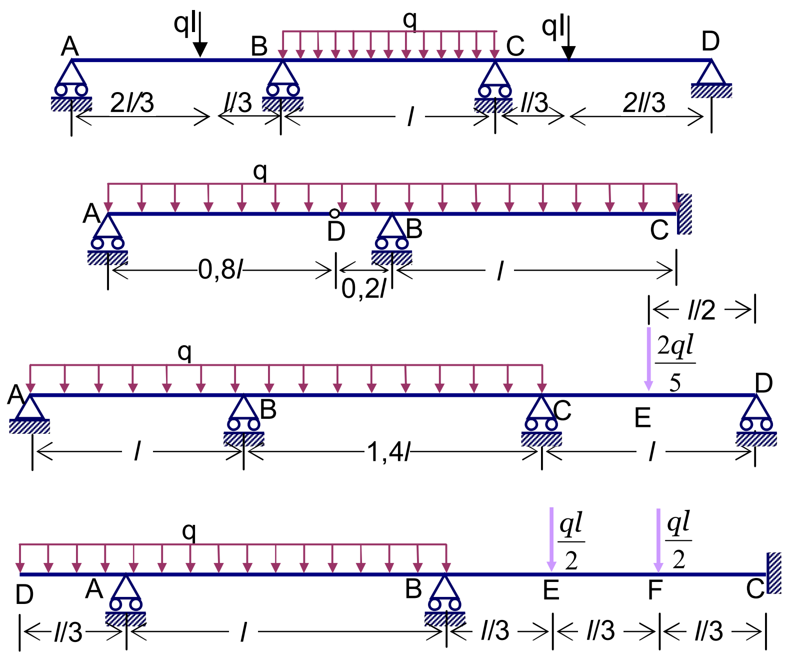
Bài 11.1

2.2. Dùng phương trình ba moment vẽ biểu đồ moment và biểu đồ lực cắt của các dầm liên tục như trên các hình vẽ sau với hai trường hợp tải trọng

- Chịu tải trọng bên ngoài như trên hình vẽ.
- Gối đỡ B lún xuống một đoạn bằng $l/2000$.

Độ cứng của các dầm không thay đổi và bằng EI





ql
q
ql
A
B
C
D
2l/3
l/3
l
l/3
2l/3
q
A
D
B
C
0,8l
0,2l
l
l/2
2ql/5
q
A
B
C
E
D
l
1,4l
l
q
ql/2
ql/2
D
A
B
E
F
C
l/3
l
l/3
l/3
l/3

Bài 11.2

CHƯƠNG 12.

Phương pháp chuyển vị

12.1 Mô tả phương pháp

1. Đầu tiên cần xác định bậc tự do của hệ. Thiết lập hệ tọa độ để xác định vị trí và hướng của các chuyển vị nút. Số lực hạn chế bằng với số bậc tự do được đặt vào các tọa độ để ngăn cản chuyển vị tại các nút. Chú ý ở đây khác với phương pháp lực là ta không phải lựa chọn. Chính điều này là ưu điểm khi lập chương trình tính toán phân tích kết cấu.

2. Sau đó các lực hạn chế được xác định như tổng các lực đầu phân tử của tất cả các phần tử nối vào nút. Phụ lục 2 và 3 cho ta bảng lực đầu phần tử cho các trường hợp chịu lực thường gặp.

   Chú ý lực hạn chế cần ngăn cản chuyển vị do mọi tác động ví dụ như ngoại lực, thay đổi nhiệt độ hay dư ứng lực. Các hiệu ứng có thể xem xét riêng biệt hay đồng thời.

   Trường hợp kể đến tác động do sự di chuyển của các nút trong kết cấu ví dụ như sự lún của gối đỡ thì các lực gây nên sự di chuyển đó phải được kể đến trong lực hạn chế.

   Nội lực tại các ví trí cần tìm của phần tử cũng được xác định cho cấu hình đã bị hạn chế.

3. Bước này kết cấu được giả thiết là biến dạng theo cách sau: một tọa độ được giả thiết là có chuyển vị đơn vị, còn các tọa độ khác cho chuyển vị bằng không. Sau đó xác đinh lực hạn chế để kết cấu ở cấu hình giả định trên. Các lực áp đặt vào các tọa độ đại diện cho bậc tự do. Đồng thời ứng với cấu hình giả định này ta xác định các nội lực tại các vị trí cần tìm. Bước tính này được lặp lại cho từng tọa độ.

4. Tiếp theo ta xác định giá trị của các chuyển vị sao cho các lực hạn chế bị triệt tiêu. Ta có các phương trình tổng hợp cộng dồn các tác động của từng chuyển vị lên lực hạn chế.

5. Cuối cùng xác định lực trên kết cấu siêu tĩnh ban đầu bằng cách cộng các lực trên kết cấu đã bị hạn chế với lực do chuyển vị gây ra được xác định trong bước 4.

Ví dụ 12.1. Xét giàn phẳng trên Hình 12.1a gồm m phần tử nối bằng khớp tại điểm A. Tìm nội lực trong các thanh dưới tác động của tổ hợp tải trong sau:

(1) Ngoại lực P đặt tại điểm A.

(2) Thanh thứ k giãn dài một đoạn là Δ_k do nhiệt độ tăng trong thanh đó.

Bậc tự do của hệ này là 2: chuyển dịch thẳng của nút A trong mặt phẳng theo hai trục x và y, ta ký hiệu chúng là D_1 và D_2. Hướng của chuyển vị tùy chọn, ở đây chọn như Hình 12.1b.

Trường hợp (1) ta hạn chế chuyển dịch của điểm A bằng cách đặt lực có độ lớn như lực P nhưng có hướng ngược lại. Các thành phần F_{11}, F_{12} theo các hướng 1, 2:

$$F_{11} = -P\cos\alpha$$
$$F_{21} = -P\sin\alpha$$

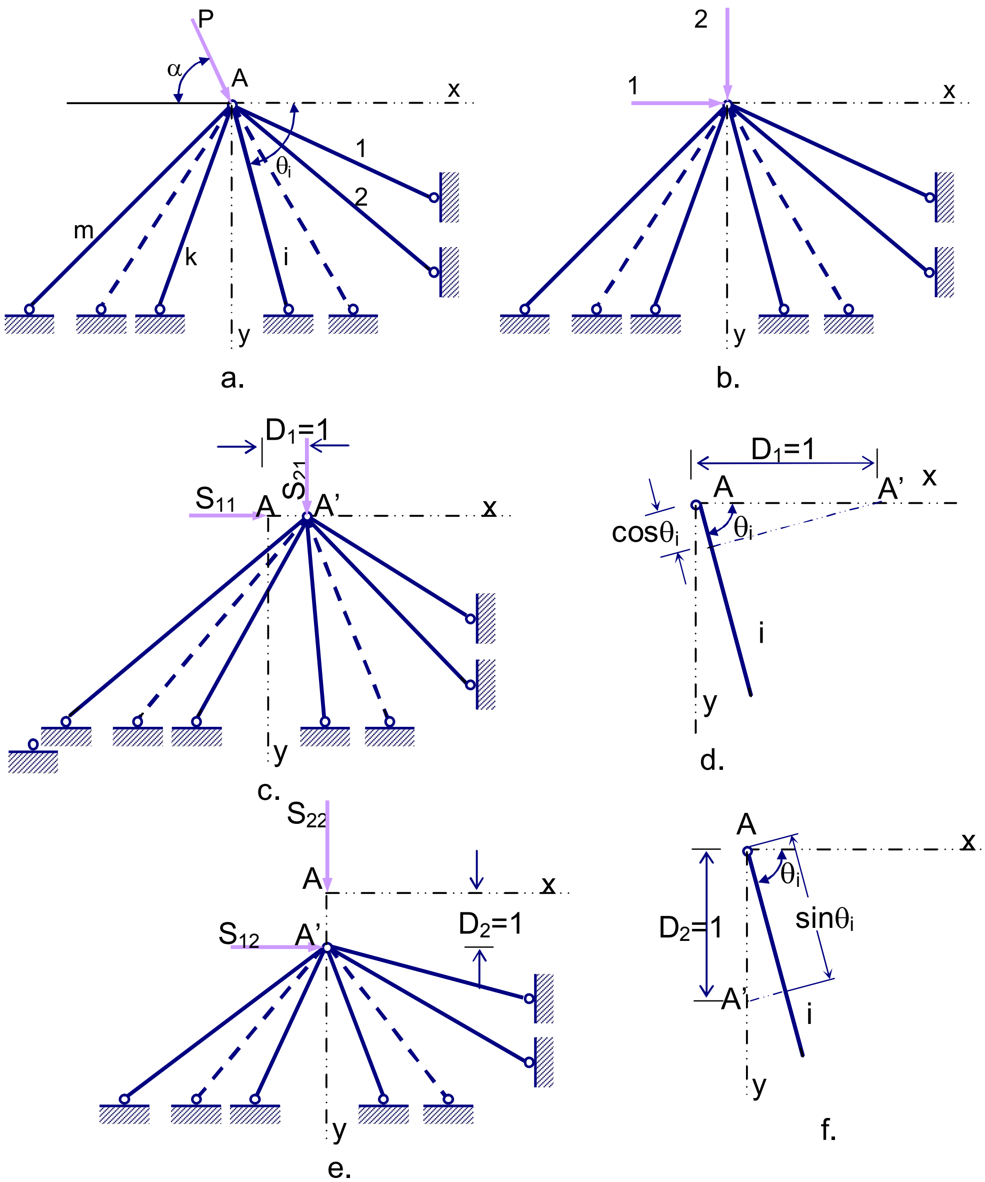
Ký hiệu E_i, l_i và a_i là module đàn hồi, độ dài và diện tích mặt cắt của thanh thứ i và đặt θ_i là góc với trục x của thanh thứ i.

Xét trường hợp (2) độ giãn dài Δ_k của thanh thứ k được hạn chế bằng một lực đặt vào điểm A gây ra sự nén của thanh cùng giá tri như sự giãn. Do vậy lực nén này cần có giá trị là $(a_k E_k / l_k)\Delta_k$. Các thành phần của lực nén này trên hai hướng 1 và 2 là

$$F_{12} = \frac{a_k E_k}{l_k}\Delta_k \cos\theta_k$$
$$F_{22} = \frac{a_k E_k}{l_k}\Delta_k \sin\theta_k$$

Như vậy tổng lực hạn chế là

$$F_1 = F_{11} + F_{12}$$
$$F_2 = F_{21} + F_{22}$$



Hình 12.1. Mô tả phương pháp chuyển vị

Ta có thể thấy khi chuyển vị bị ngăn cản, sẽ không có nội lực ở các thanh trong trường hợp (1), còn trường hợp (2) chỉ có thanh thứ k có lực nén, các thanh còn lại không có nội lực. Ký hiệu $\{A_r\}$ là vectơ lực dọc trục trong các thanh trong điều kiện kết cấu bị hạn chế chuyển vị, ta có

$$A_{r1} = 0$$
$$A_{r2} = 0$$
$$\Lambda$$
$$A_{rk} = -\frac{a_k E_k}{l_k}\Delta_k$$
$$\Lambda$$
$$A_{rm} = 0$$

Trên Hình 12.1c biểu diễn các lực cần để kết cấu biến dạng ở cấu hình mà D_1=1 và D_2=0. Từ Hình 12.1d ta thấy chuyển vị sang ngang một đơn vị làm thanh i bất kỳ ngắn đi một đoạn $\cos\theta_i$ và gây ra lực nén $(a_i E_i / l_i)\cos\theta_i$ dọc thanh i. Do vậy để giữ điểm A ở cấu hình này ta cần đặt các lực $(a_i E_i / l_i)\cos^2\theta_i$ và $(a_i E_i / l_i)\cos\theta_i \sin\theta_i$ theo hướng 1 và 2. Vậy tổng lực cần để tất cả các thanh ở đúng cấu hình này là

$$S_{11} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i E_i}{l_i}\cos^2\theta_i$$

và $S_{21} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i E_i}{l_i}\cos\theta_i \sin\theta_i$

Tương tự, như vậy để điểm A ở cấu hình mà D_1=0 và D_2=1 (Hình 12.1e và f) ta cần đặt các lực sau

$$S_{12} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i E_i}{l_i}\cos\theta_i \sin\theta_i$$

và $S_{22} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i E_i}{l_i}\sin^2\theta_i$

Các phần tử S_{ij} có 2 chỉ số: chỉ số thứ nhất biểu diễn tọa độ của lực hạn chế, chỉ số thứ hai là thành phần của chuyển vị có giá trị đơn vị.

Trong thực tế điểm A dịch chuyển đi các đoạn D_1 và D_2 theo hướng 1 và 2, và không có lực hạn chế nào cả. Do vậy tổ hợp của lực hạn chế và tác động của chuyển vị thật phải bằng không. Ta có quan hệ tĩnh học thể hiện sự thật là khi điểm A có chuyển vị D_1 và D_2 thì các lực hạn chế bằng không. Ta có biểu thức

$$\left.\begin{aligned} F_1 + S_{11}D_1 + S_{12}D_2 = 0 \\ F_2 + S_{21}D_1 + S_{22}D_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

12.2 Ma trận độ cứng

Phương trình (12.1) có thể viết dưới dạng ma trận

$$\{F\} + [S]\{D\} = 0$$

$$[S]\{D\} = \{-F\} \tag{12.2}$$

trong đó $\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$ $[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

(có thể so sánh với phương trình quan hệ hình học (11.4) của phương pháp lực).

Véc tơ {F} phụ thuộc vào tải trọng của kết cấu. Thành phần của ma trận [S] là các lực ứng với chuyển vị đơn vị. Do vậy ma trận [S] chỉ phụ thuộc vào đặc trưng kết cấu, chúng thể hiện độ cứng của kết cấu. Vì vậy [S] được gọi là ma trận độ cứng và các thành phần của nó được gọi là các hệ số độ cứng.

Các thành phần của vectơ chuyển vị {D} xác định từ

$$\{D\} = [S]^{-1}\{-F\} \tag{12.3}$$

Trường hợp chung, khi hệ có n bậc tự do ta có kích cỡ của $\{D\}_{nx1}$, $[S]_{nxn}$, $\{F\}_{nx1}$. Ma trận [S] là ma trận vuông đối xứng.

Nội lực trong thanh i bất kỳ được xác định bằng tổ hợp của các điều kiện hạn chế và tác động của các chuyển vị nút

$$A_i = A_{ri} + \left(A_{ui1}D_1 + A_{ui2}D_2 + \Lambda + A_{uin}D_n\right) \tag{12.4}$$

Dưới dạng ma trận

$$\{A\}_{m\times1} = \{A_r\}_{m\times1} + [A_u]_{m\times n}\{D\}_{n\times1}$$

trong đó thành phần của {A} là tổng lực trong các thanh, thành phần của $\{A_r\}$ là lực trong các thanh dưới điều kiện hạn chế, và thành phần của $[A_u]$ lực trong các thanh ứng với các chuyển vị đơn vị. Cột j của $[A_u]$ là lực trong các thanh khi chuyển vị D_j=1 còn các chuyển vị còn lại bằng không. Dạng tổng quát

$$\{A\} = \{A_r\} + [A_u]\{D\} \tag{12.5}$$

trong đó thành phần của {A} là tổng lực trong các thanh, thành phần của {A_r} là lực trong các thanh dưới điều kiện hạn chế, và thành phần của [A_u] lực trong các thanh ứng với các chuyển vị đơn vị.

Trong ví dụ ở Hình 12.1

$$[A_u] = \begin{bmatrix} -\frac{a_1E_1}{l_1}\cos\theta_1 & -\frac{a_1E_1}{l_1}\sin\theta_1 \\ -\frac{a_2E_2}{l_1}\cos\theta_2 & -\frac{a_2E_2}{l_2}\sin\theta_2 \\ & \\ -\frac{a_mE_m}{l_m}\cos\theta_m & -\frac{a_mE_m}{l_m}\sin\theta_m \end{bmatrix}$$

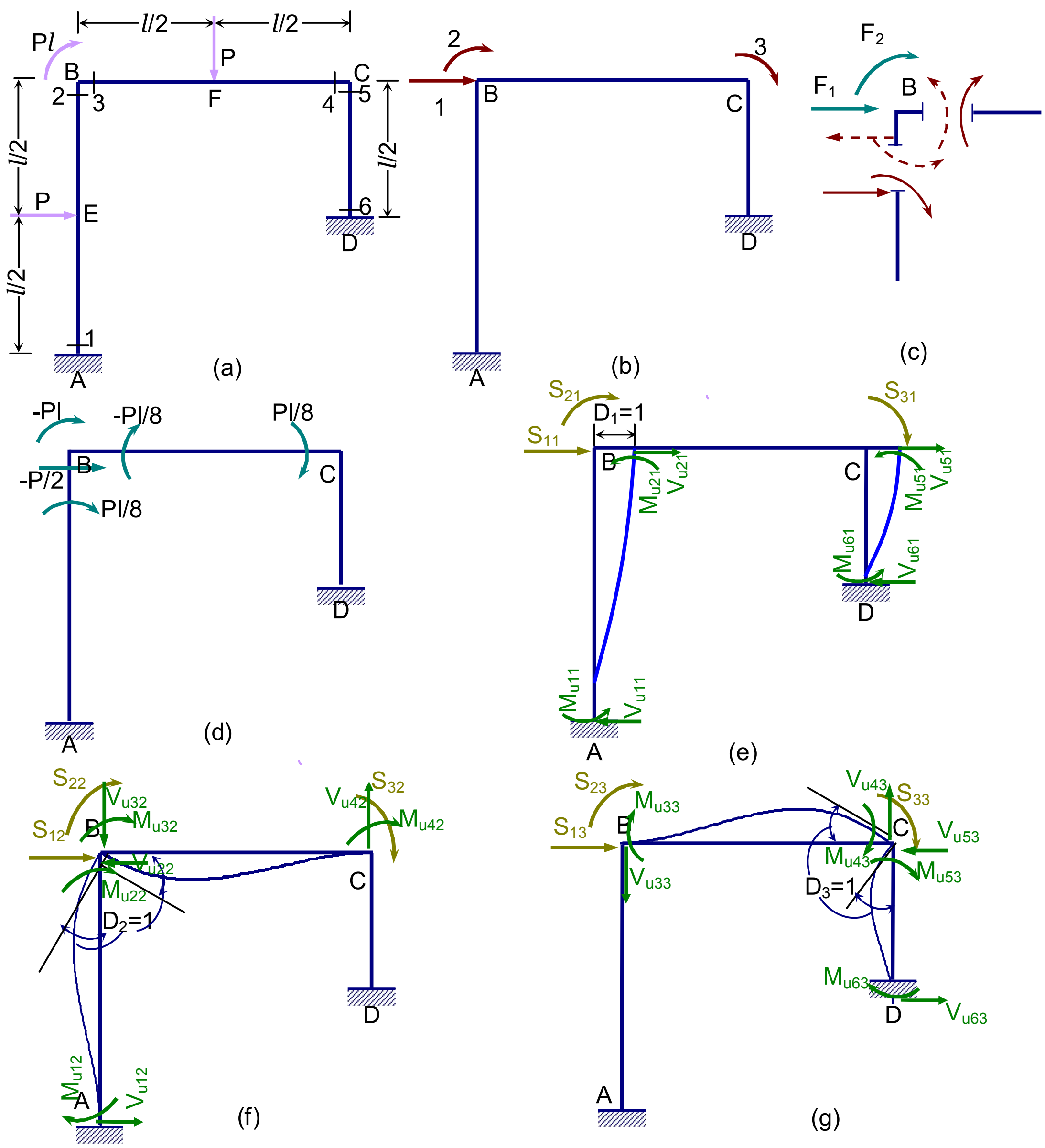
Khi xét khung với các ngàm ở nút ta cần tìm nội lực ở mặt cắt hay ở gối đỡ. Chính vì vậy ta có phương trình ở dạng tổng quát (12.5), ở đây {A} có thế là đáp ứng bất kỳ - lực cắt, lực dọc trục, mô men uốn hay mô men xoắn.

Ví dụ 12.2. Xét khung phẳng trên Hình 12.2a gồm các phần tử có cùng độ cứng EI được nối cứng với nhau. Xác định biểu đồ mô men cho khung dưới tác động của lực P ở E và F và ngẫu lực Pl tại điểm B. Bỏ qua sự thay đổi độ dài của thanh.

Hệ có ba bậc tự do như Hình 12.2b đó là chuyển vị ngang (nút B và C như nhau vì coi độ dài thanh không đổi), góc xoay tại B và tại A. Ta có hệ tọa độ như Hình 12.2b. Lực hạn chế là tổng các lực đầu phần tử ở các thanh tính được dùng phụ lục 3.

Hình 12.2.c biểu diễn quan hệ giữa lực đầu phần tử và lực hạn chế chuyển vị. Các lực tác động là ở nút biểu diễn bằng các mũi tên liền, còn lực có giá trị bằng và hướng ngược lại bằng mũi tên ngắt quãng. Như vậy cần đặt vào điểm B các lực F_1 và F_2 cùng hướng với các mũi tên ngắt quãng để ngăn cản chuyển vị. Do vậy để có được các lực hạn chế này ta chỉ cần thêm các lực đầu phần tử như Hình 12.2d.

Các lực hạn chế chuyển vị tại điểm B và điểm C cho dưới đây



Hình 12.2. Lập ma trận độ cứng cho ví dụ 12.2

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -0{,}5P \\ (0{,}125Pl - 0{,}125Pl - Pl) \\ 0{,}125Pl \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ -l \\ 0{,}125l \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Để vẽ biểu đồ nội lực ta cần tính xác định mô men và lực cắt tại các mặt cắt ở hai đầu thanh. Ký hiệu 1, 2, 3, 4, 5, 6 là các mặt cắt tại các đầu thanh như trên Hình 12.1a. Với quy ước dấu mô men dương quay theo chiều kim đồng hồ, lực cắt dương làm thanh võng xuống. Các giá trị của 6 mô men và lực cắt ứng với điều kiện hạn chế chuyển vị sẽ là

$$\{M_r\} = \frac{Pl}{8}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{V_r\} = -\frac{P}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Các phần tử của ma trận độ cứng chính là các lực ở các tọa độ cần để đưa kết cấu đến ví trí như Hình 12.2e, f, d. Các lực này bằng tổng các lực đầu phần tử tính theo phụ lục 3.

$D_1 = 1; D_2 = 0; D_3 = 0$

$$S_{11} = \frac{12EI}{l^3} + \frac{12EI}{(l/2)^3} = \frac{108EI}{l^3}$$

$$S_{21} = -\frac{6EI}{l^2};$$

$$S_{31} = -\frac{6EI}{(l/2)^2} = -\frac{24EI}{l^2}$$

;

$D_1 = 0; D_2 = 1; D_3 = 0$

$$S_{12} = -\frac{6EI}{l^2}$$

$$S_{22} = \frac{8EI}{l};$$

$$S_{32} = \frac{2EI}{l}$$

;

$D_1 = 1; D_2 = 0; D_3 = 0$

$$S_{13} = -\frac{6EI}{(l/2)^2} = -\frac{24EI}{l^2}$$

$$S_{23} = \frac{2EI}{l};$$

$$S_{33} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{l/2} = \frac{12EI}{l}$$

Ma trận độ cứng [S] có dạng

$$[S] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 108 & -6l & -24l \\ -6l & 8l^2 & 2l^2 \\ -24l & 2l^2 & 12l^l \end{bmatrix} \quad [S]^{-1} = \frac{l^2}{1368EI}\begin{bmatrix} 23l & 6 & 45 \\ 6 & 108/l & -18/l \\ 45 & -18/l & 207/l \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

Ta thể (a) và (b) vào phương trình 12.3 nhận được

$$\{D\} = [S]^{-1}\{-F\} = \frac{Pl^2}{1368EI}\begin{bmatrix} 23l & 6 & 45 \\ 6 & 108/l & -18/l \\ 45 & -18/l & 207/l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5 \\ l \\ -0.125l \end{Bmatrix} = \frac{Pl^2}{EI}\begin{Bmatrix} 0{,}0087l \\ 0{,}1355 \\ -0{,}0156 \end{Bmatrix}$$

Để viết ma trận nội lực đầu thanh gây ra do chuyển vị đơn vị ta đặt các giá trị mô men (lực cắt) tại các mặt cắt 1, 2, ..., 6 vào cột 1, 2 và 3 cho trường hợp chuyển vị đơn vị như trên Hình 12.2 e, f, g.

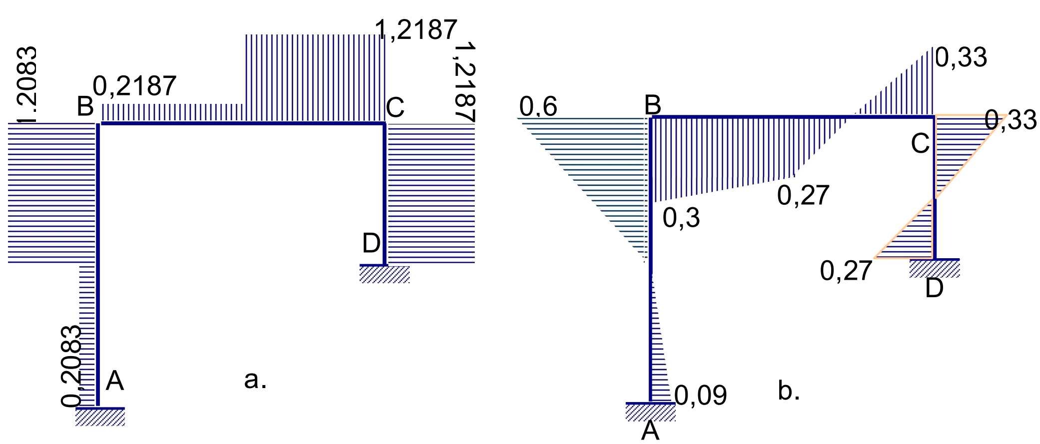
$$[M_u]=\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}-6/l & 2 & 0\\ -6/l & 4 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ -24/l & 0 & 8\\ -24/l & 0 & 4\end{bmatrix};\quad [V_u]=\frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix}-12/l & 6 & 0\\ 12/l & -6 & 0\\ 0 & 6 & 6\\ 0 & -6 & -6\\ 96/l & 0 & -24\\ -96/l & 0 & 24\end{bmatrix};$$

Moment (lực cắt) tại các mặt cắt đầu thanh sẽ được tính từ phương trình 12.5:

$$\{M\}=\frac{Pl}{8}\begin{Bmatrix}-1\\1\\-1\\1\\0\\0\end{Bmatrix}+\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}-6/l & 2 & 0\\ -6/l & 4 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ -24/l & 0 & 8\\ -24/l & 0 & 4\end{bmatrix}\frac{Pl^2}{EI}\begin{Bmatrix}0{,}0087l\\0{,}1355\\-0{,}0156\end{Bmatrix}=Pl\begin{Bmatrix}0{,}09375\\0{,}61458\\0{,}38542\\0{,}33333\\-0{,}33333\\-0{,}27083\end{Bmatrix};$$

$$\{V\}=\frac{P}{2}\begin{Bmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\0\\0\end{Bmatrix}+\frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix}-12/l & 6 & 0\\ 12/l & -6 & 0\\ 0 & 6 & 6\\ 0 & -6 & -6\\ 96/l & 0 & -24\\ -96/l & 0 & 24\end{bmatrix}\frac{Pl^2}{EI}\begin{Bmatrix}0{,}0087l\\0{,}1355\\-0{,}0156\end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}0{,}20833\\-1{,}20833\\0{,}21875\\-1{,}21875\\1{,}20833\\-1{,}20833\end{Bmatrix};$$

Biểu đồ lực cắt và mô men trình bày trong Hình 12.3. a và b.

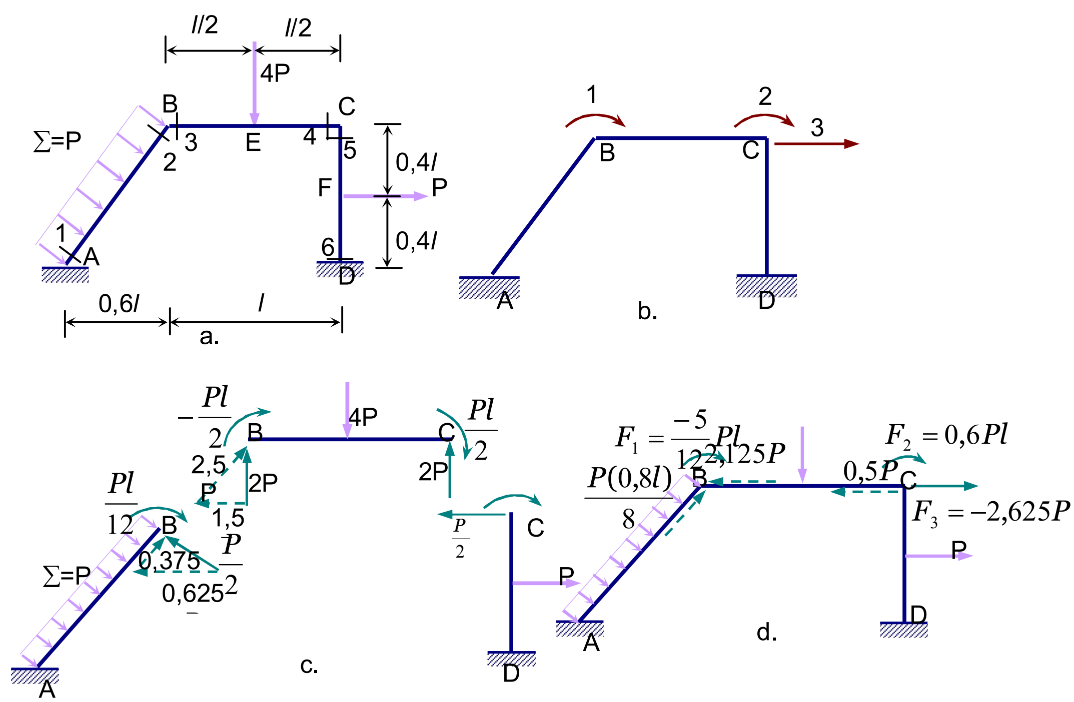


Hình 12.3 Biểu đồ lực cắt và mô men cho ví dụ 12.2

Chú ý: Khi sử dụng các chương trình tính toán nói chung không bỏ qua biến dạng dọc trục. Lúc đó đối với khung phẳng tại mỗi nút ta có ba chuyển vị gồm: hai dịch chuyển thẳng và một góc xoay. Tại mỗi mặt cắt ta có lực dọc trục, lực cắt và mô men. Phương trình (12.5) được áp dụng để tính cả ba nội lực này.

Khung với các thanh nghiêng được xét trong Ví dụ 12.3.

Ví dụ 12.3. Vẽ biểu đồ mô men cho khung trên Hình 12.4a. Độ cứng của thanh không đổi bằng EI. Bỏ qua biến dạng dọc trục.



Hình 12.4

Trên Hình 12.4b. biểu diễn ba bậc tự do ứng với ba tọa độ: hai góc xoay và một dịch chuyển thẳng. Lực đầu phần tử do ngoại lực xác định trên Hình 12.4c. Lực hạn chế F_1 và F_2 xác định bằng cách cộng mô men. Để tính lực F_3, ta phân các lực cắt tại nút B và nút C ra thành các thành phần dọc theo trục của phần tử (Hình 12.4d), sau đó ta cộng các thành phần theo hướng của tọa độ thứ 3.

Như vậy ta có

$$\{F\}=\begin{Bmatrix} \dfrac{Pl}{12}-\dfrac{Pl}{2} \\ \dfrac{Pl}{2}+\dfrac{P(0{,}8l)}{8} \\ -0{,}625P-1{,}5P-\dfrac{P}{2} \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} -\dfrac{5}{12}l \\ 0{,}6l \\ -2{,}625 \end{Bmatrix};\ \{M_r\}=Pl\begin{Bmatrix} -1/12 \\ 1/12 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ -0{,}1 \end{Bmatrix}\ \{V_r\}=-\frac{P}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

Để xác định các nội lực tại đầu phần tử ứng với từng trường hợp chuyển vị đơn vị ta dùng phụ lục 3, xem trên Hình 12.5.

Khi D_3=1 dịch chuyển tương đối của các thanh AB và BC là D_{BA}=1.25, D_{BC}=0.75. Ta có ma trận M_u và V_u.

$$[M_u]=\frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix} 2l & 0 & -7{,}25 \\ 4l & 0 & -7{,}25 \\ 4l & 2l & 4{,}5 \\ 2l & 4l & 4{,}5 \\ 0 & 5l & -9{,}375 \\ 0 & 2{,}5l & -9{,}375 \end{bmatrix};\ [V_u]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6l & 0 & -15 \\ -6l & 0 & 15 \\ 6l & 6l & 9 \\ -6l & -6l & -9 \\ 0 & 6l & 23{,}4375 \\ 0 & -6l & -23{,}4375 \end{bmatrix};$$

Để thiết lập ma trận độ cứng [S] ta tính lực đầu phần tử như trên Hình 12.3e, g và i ta được

$D_1=1; D_2=0; D_3=0$

$$S_{11}=\frac{4EI}{l}+\frac{4EI}{l}=\frac{8EI}{l}$$

$$S_{21}=\frac{2EI}{l}$$

$$S_{31}=-\frac{7{,}5EI}{l^2}+\frac{4{,}5EI}{l^2}=-\frac{3EI}{l^2}$$

$D_1=0; D_2=1; D_3=0$

$$S_{12}=\frac{2EI}{l}$$

$$;\ S_{22}=\frac{4EI}{l}+\frac{4EI}{0{,}8l}=\frac{9EI}{l};$$

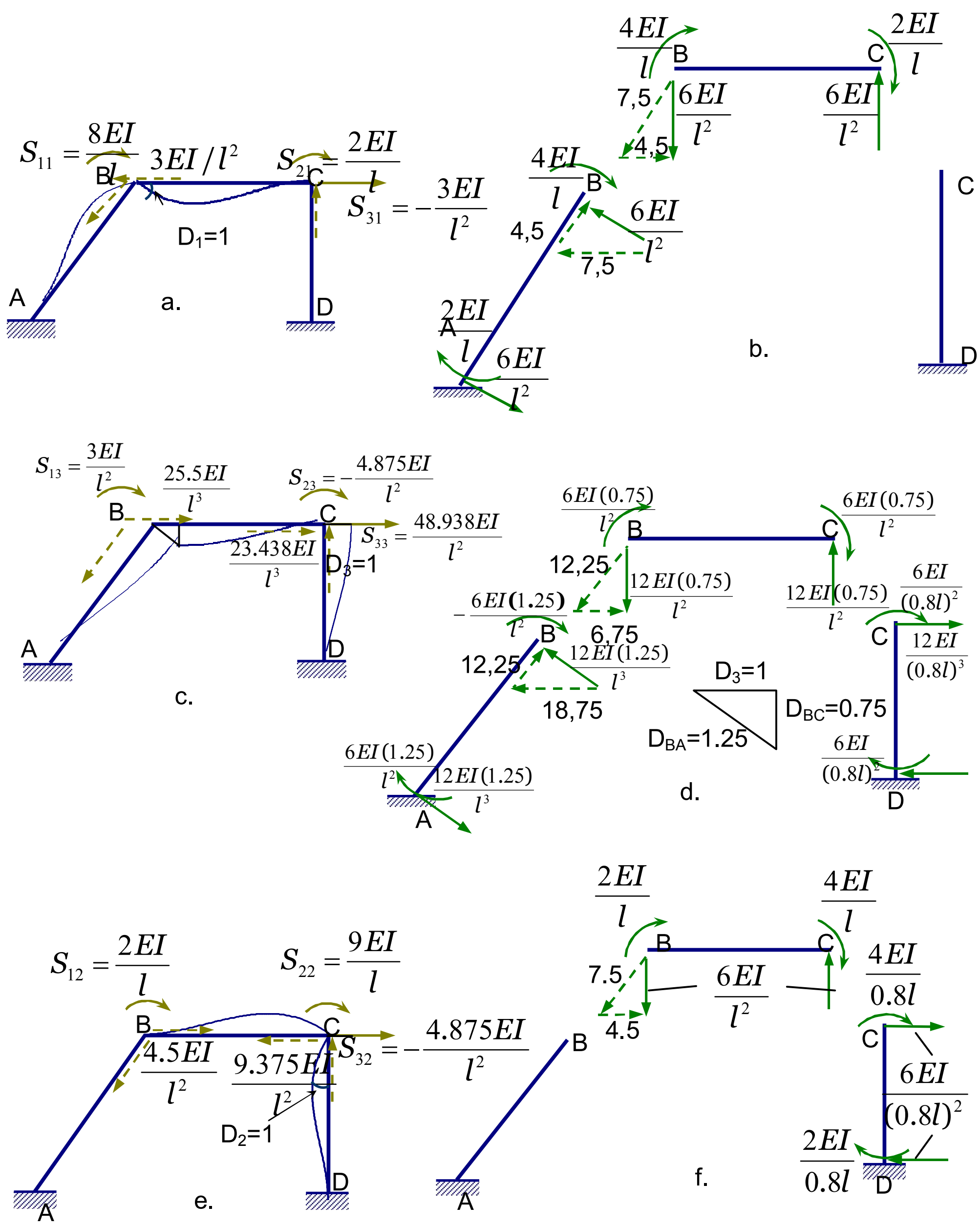
$$S_{32}=\frac{4.5EI}{l^2}-\frac{6EI}{(0{,}8l)^2}=-\frac{4{,}875EI}{l^2}$$

$D_1=0; D_2=0; D_3=1$

$$S_{13}=-\frac{6EI(1{,}25)}{l^2}+\frac{6EI(0{,}75)}{l^2}=-\frac{3EI}{l^2}$$

$$S_{23}=\frac{6EI(0{,}75)}{l^2}-\frac{6EI}{(0{,}8l)^2}=-\frac{4{,}875EI}{l^2};$$

$$S_{33}=\frac{18{,}75EI}{l^3}+\frac{6{,}75EI}{l^3}+\frac{12EI}{(0{,}8l)^3}=\frac{48{,}9375EI}{l^3}$$



Hình 12.5. Thiết lập ma trận độ cứng cho hệ khung có thanh chéo

Ta có ma trận độ cứng [S] như sau

$$[S]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 8l^2 & 2l^2 & -3l \\ 2l^2 & 9l^2 & -4{,}875l \\ -3l & -4{,}875l & 48{,}9375 \end{bmatrix} \quad [S]^{-1}=\frac{l}{24921EI}\begin{bmatrix} 3333{,}375 & -666 & 138l \\ -666 & 3060 & 264l \\ 138l & 264l & 544l^2 \end{bmatrix}$$

Thế vào phương trình 12.2 ta có

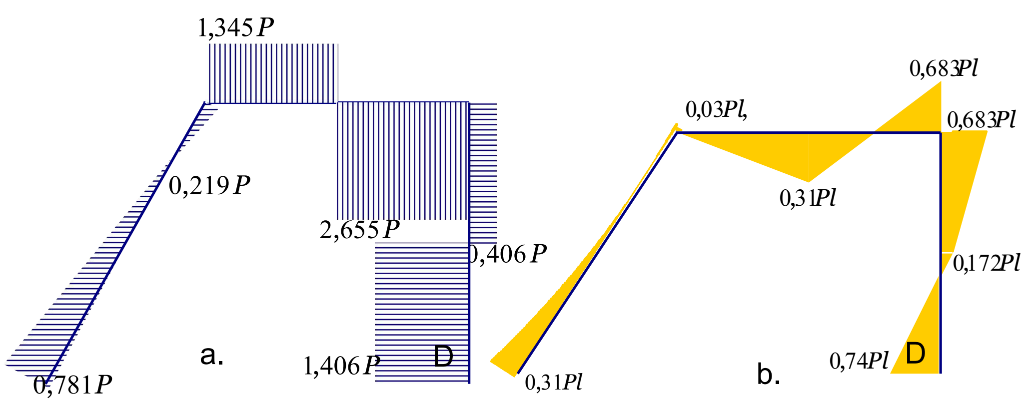
$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 8l^2 & 2l^2 & -3l \\ 2l^2 & 9l^2 & -4{,}875l \\ -3l & -4{,}875l & 48{,}9375 \end{bmatrix}\{D\} = P\begin{Bmatrix} \frac{5}{12}l \\ -0{,}6l \\ 2{,}625 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{D\} = \frac{Pl^2}{EI}\begin{Bmatrix} 0{,}0863 \\ -0{,}057 \\ 0{,}05325l \end{Bmatrix}$$

Để vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ mô men ta phải tính nội lực tại các mặt cắt ở đầu các thanh. Sử dụng ma trận $[M_u]$, $[V_u]$, $\{M_r\}$, $\{V_r\}$ và $\{D\}$ đã tính được thế vào phương trình (10.5) ta được

$$\{M\} = Pl\begin{Bmatrix} -1/12 \\ 1/12 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}1 \\ 0{,}1 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix} 2l & 0 & -7{,}5 \\ 4l & 0 & -7{,}5 \\ 4l & 2l & 4{,}5 \\ 2l & 4l & 4{,}5 \\ 0 & 5l & -9{,}375 \\ 0 & 2.5l & -9{,}375 \end{bmatrix}\frac{Pl^2}{EI}\begin{Bmatrix} 0{,}0863 \\ -0{,}057 \\ 0{,}05325l \end{Bmatrix} = Pl\begin{Bmatrix} -0{,}31012 \\ 0{,}029153 \\ -0{,}02915 \\ 0{,}684241 \\ -0{,}68424 \\ -0{,}74174 \end{Bmatrix};$$

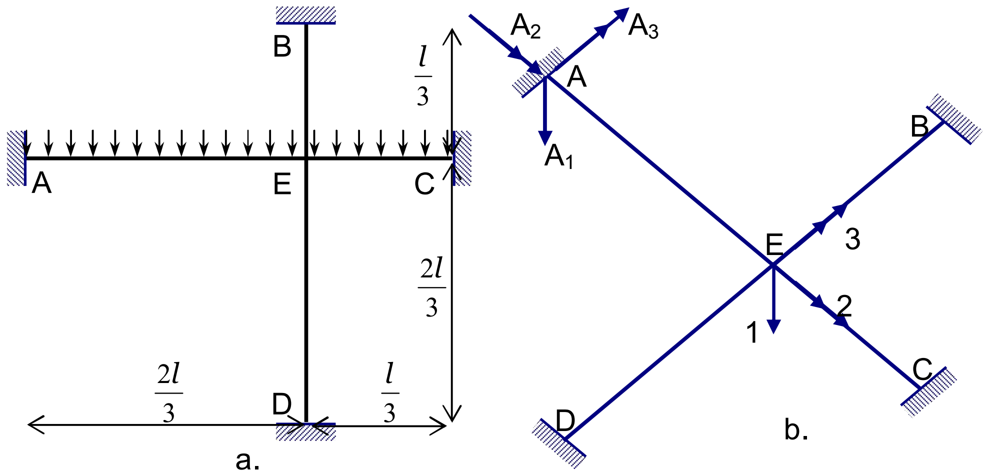
$$\{V\} = P\begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ -2 \\ -2 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6l & 0 & -15 \\ -6l & 0 & 15 \\ 6l & 6l & 9 \\ -6l & -6l & -9 \\ 0 & 6l & 23{,}4375 \\ 0 & -6l & -23{,}4375 \end{bmatrix}\frac{Pl^2}{EI}\begin{Bmatrix} 0{,}0863 \\ -0{,}057 \\ 0{,}05325l \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} -0{,}780966 \\ -0{,}219034 \\ -1{,}344912 \\ -2{,}655088 \\ 0{,}4061 \\ -1{,}4061 \end{Bmatrix};$$

Trên Hình 12.6 biểu diễn biểu đồ lực cắt (Hình 12.4a) và biểu đồ mô men (12.4b)



Hình 12.6. Biểu đồ nội lực

Ví dụ 12.4. Tìm ba thành phần phản lực (lực thẳng đứng, mô men uốn và momnet xoắn) tại điểm A của khung ngang như trên Hình 12.7 chịu tải trọng phân bố đều q trên đoạn AC. Tất cả các thanh có cùng diện tích mặt cắt ngang, và tỷ lệ giữa độ cứng xoắn và độ cứng uốn GJ/EI=0.5.



Hình 12.7. Khung ngang

Hệ có 3 bậc tự do là các chuyển vị tại điểm E, có tọa độ như trên Hình 12.7b. Trên Hình 12.7b biểu diễn các lực hạn chế chuyển dịch, và phản lực tại A $\{A_r\}$ khi bị hạn chế. Những lực này được tính sử dụng phụ lục 2.

$$\{F\}=\begin{Bmatrix} -\frac{q}{2}\frac{2l}{3}-\frac{q}{2}\frac{l}{3} \\ 0 \\ \frac{q}{12}\left(\frac{2l}{3}\right)^2-\frac{q}{12}\left(\frac{l}{3}\right)^2 \end{Bmatrix}=q\begin{Bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ \frac{l^2}{36} \end{Bmatrix} \quad \{A_r\}=\begin{Bmatrix} -\frac{q}{2}\frac{2l}{3} \\ 0 \\ -\frac{q}{12}\left(\frac{2l}{3}\right)^2 \end{Bmatrix}=q\begin{Bmatrix} -\frac{l}{3} \\ 0 \\ -\frac{l^2}{27} \end{Bmatrix}$$

Để thiết lập ma trận độ cứng phần tử cũng như ma trận phản lực tại đầu A, ta cho từng chuyển vi bằng đơn vị (còn các chuyển vị khác bằng không) và sử dụng phụ lục 3.

Ma trận phản lực tại điểm A do từng chuyển vị đơn vị gây ra được tính như sau

$$[A_u]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} -40{,}5 & 0 & 13{,}5l \\ 0 & -0{,}75l^2 & 0 \\ -13{,}5l & 0 & 3l^2 \end{bmatrix}$$

Các phần tử của ma trận độ cứng cho từng cấu hình được tính dưới đây

$$D_1 = 1; D_2 = 0; D_3 = 0$$

$$S_{11} = \frac{12EI}{l_{AE}^3} + \frac{12EI}{l_{EC}^3} + \frac{12EI}{l_{DE}^3} + \frac{12EI}{l_{EB}^3} = \frac{12EI}{l^3}\left(2\cdot\frac{3^3}{2^3} + 2\cdot 3^3\right) = 729\frac{EI}{l^3}$$

$$S_{21} = -\frac{6EI}{l_{BE}^2} + \frac{6EI}{l_{ED}^2} = -\frac{6EI}{l^2}\left(3^2 - \frac{3^2}{2^2}\right) = -40{,}5\frac{EI}{l^2};$$

$$S_{31} = -\frac{6EI}{l_{AE}^2} + \frac{6EI}{l_{EC}^2} = \frac{6EI}{l^2}\left(3^2 - \frac{3^2}{2^2}\right) = 40{,}5\frac{EI}{l^2}$$

$$D_1 = 0; D_2 = 1; D_3 = 0$$

$$S_{12} = \frac{6EI}{l_{DE}^2} - \frac{6EI}{l_{EB}^2} = \frac{6EI}{l^2}\left(\frac{3^2}{2^2} - 3^2\right) = -40{,}5\frac{EI}{l^2}$$

$$S_{22} = \frac{GJ}{l_{AE}} + \frac{GJ}{l_{EC}} + \frac{4EI}{l_{DE}} + \frac{4EI}{l_{EB}} = \frac{EI}{l}\left(\frac{3}{2\cdot 2} + \frac{3}{2} + \frac{4\cdot 3}{2} + 4\cdot 3\right) = 20{,}25\frac{EI}{l};$$

$$S_{32} = 0$$

$$D_1 = 0; D_2 = 1; D_3 = 0$$

$$S_{12} = \frac{6EI}{l_{EC}^2} - \frac{6EI}{l_{AE}^2} = \frac{6EI}{l^3}\left(3^2 - \frac{3^2}{2^2}\right) = 40{,}5\frac{EI}{l^2}$$

$$S_{23} = 0$$

$$S_{33} = \frac{GJ}{l_{DE}} + \frac{GJ}{l_{EB}} + \frac{4EI}{l_{AE}} + \frac{4EI}{l_{EC}} = \frac{EI}{l}\left(\frac{3}{2\cdot 2} + \frac{3}{2} + \frac{4\cdot 3}{2} + 4\cdot 3\right) = 20{,}25\frac{EI}{l};$$

Ma trận độ cứng có dạng

$$[S] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 729 & -40{,}5l & 40{,}5l \\ -40{,}5l & 20{,}25l^2 & 0 \\ 40{,}5l & 0 & 20{,}25l^2 \end{bmatrix}$$

Thế vào phương trình 12.2 ta tìm được vectơ chuyển vị

$$\{D\} = \frac{ql^3}{EI}\begin{Bmatrix} 0{,}0010l \\ 0{,}0020 \\ -0{,}0034 \end{Bmatrix}$$

Phản lực tại đầu A tìm được từ phương trình 12.5

$$\{A\} = q\begin{Bmatrix} -\dfrac{l}{3} \\ 0 \\ -\dfrac{l^2}{27} \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} -40{,}5 & 0 & 13{,}5l \\ 0 & -0{,}75l^2 & 0 \\ -13{,}5l & 0 & 3l^2 \end{bmatrix}\frac{ql^3}{EI}\begin{Bmatrix} 0{,}0010l \\ 0{,}0020 \\ -0{,}0034 \end{Bmatrix} = ql\begin{Bmatrix} -0{,}4197 \\ -0{,}0015l \\ -0{,}0611l \end{Bmatrix}$$

12.3 Giải bài toán với các trường hợp đặt tải khác

Như đã nói ở mục 12.2 ma trận độ cứng chỉ phụ thuộc vào tính chất của kết cấu không phụ thuộc vào ngoại lực. Vì vậy khi xem xét các trường hợp tải khác nhau ta không cần tính lại ma trận độ cứng. Nếu ta có p trường hợp tải lời giải (phương trình 12.3) có thể viết gọn dưới dạng phương trình ma trận

$$[D]_{n\times p} = [S]^{-1}_{n\times n}[-F]_{n\times p} \qquad (12.6)$$

Mỗi cột của [D] và [-F] ứng với mỗi trường hợp tải.

Ảnh hưởng của môi trường

Trong chương 10 ta dùng phương pháp lực để tích toán các ảnh hưởng của thay đổi nhiệt độ, co ngót hay dư ứng lực. Tương tự phương pháp chuyển vị cũng xem xét đến các hiệu ứng trên. Có thể áp dụng phương trình 12.3 nhưng vectơ {F} khi đó là vectơ lực hạn chế chuyển vị nút gây ra bởi những hiệu ứng trên.

Trường hợp hiệu ứng di chuyển của gối đỡ ta vẫn dùng phương trình 12.3 khi sự di chuyển này không ứng bậc tự do của hệ. Trường hợp di chuyển này ứng với bậc tự do ta cần biến đổi phương trình 12.3. Ví dụ 12.5 sẽ giải thích rõ cách biến đổi.

12.4 Năm bước giải của phương pháp chuyển vị

Bước 1. Xác định hệ tọa độ biểu diễn các chuyển vị nút, đồng thời xác định các đáp ứng cần tính $[A]_{m\times p}$ và xác định quy ước dấu nếu cần.

Bước 2. Xác định lực hạn chế $[F]_{n\times p}$ và $[A_r]_{m\times p}$ do ngoại lực tác động lên kết cấu.

Bước 3. Thiết lập $[S]_{n\times n}$ và $[A_u]_{m\times p}$ bằng cách đưa các chuyển vị đơn vị tại từng tạo độ một.

Bước 4. Giải phương trình cân bằng

$$[S]_{n\times n}[D]_{n\times p} = [-F]_{n\times p}$$

để tìm [D].

Bước 5. Tìm các đáp ứng từ

$$[A]_{m\times p} = [A_r]_{m\times p} + [A_u]_{m\times n}[D]_{n\times p}$$

Cũng như phương pháp lực sau khi bước thứ ba đã xong ta có các ma trận cần thiết bước 4 và 5 chỉ là thuần túy các phép tính đại số.

Ở đây các ký hiệu:

n,p,m - số bậc tự do, số trường hợp tải, số đáp ứng (phản lực hay nội lực) cần xác định.

[A] – đáp ứng cần xác định - lời giải của bài toán.

[A_r] – giá trị đáp ứng do ngoại lực tác động lên kết cấu khi hạn chế chuyển vị.

[A_u] – đáp ứng do ta đưa chuyển vị đơn vị lần lượt tại từng tọa độ.

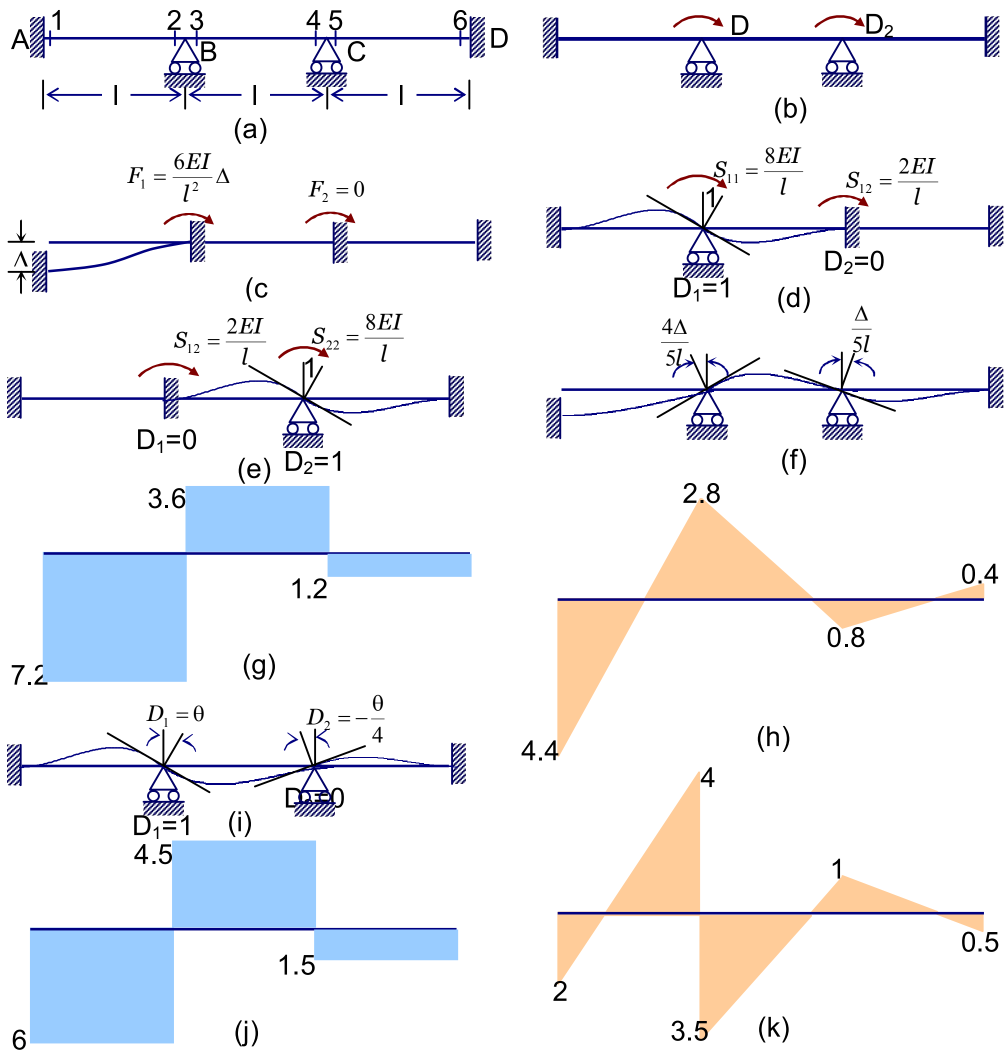
[F] - lực tại các tọa độ để ngăn cản các chuyển vị do lực tác động gây ra .

[S] – ma trận độ cứng.

Ví dụ 12.5. Dầm liên tục như trên Hình 12.6a có độ cứng uốn EI không đổi, có hai ngàm tại A và D và hai gối đỡ di động tại B và C. Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm với hai trường hợp tải: a) Điểm A lún xuống một đọan là Δ; b) Khi dầm quay đi một góc θ theo chiều kim đông hồ tại gối B.

Số bậc tự do của hệ là 2, đó là góc xoay D_1 và D_2 tại B và C (Hình 12.6b). Dịch chuyển của điểm A không ứng với bậc tự do. Lúc này lực hạn chế có nhiệm vụ giữ cho chuyển vị D_1=D_2=0 như biểu diễn trên Hình 12.6c. Dùng phụ lục 3 ta tính được

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2}\Delta \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Hình 12.8. Biểu đồ nội lực của ví dụ 12.5

Quy ước mô men dương theo chiều kim đồng hồ, lực dương hướng lên trên ta có các mô men và lực cắt tại các mặt cắt 1,2,...,6 (Hình 12.8a) điều kiện hạn chế (Hình 12.8b) là

$$\{M_r\} = \begin{Bmatrix} M_{r1} \\ M_{r2} \\ M_{r3} \\ M_{r4} \\ M_{r5} \\ M_{r6} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2}\Delta \begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \ \{V_r\} = \begin{Bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \\ V_{r6} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3}\Delta \begin{Bmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Lực đầu phần tử cần để giữ các phần tử ở cấu hình với D_1 hoặc D_2 bằng đơn vị (Hình 12.8d và e) được xác định từ phụ lục 3 và từ đó ta có ma trận độ cứng

$$[S] = -\frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix};\ [S]^{-1} = \frac{l}{60EI}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Giải phương trình 12.3 ta được

$$\{D\} = \frac{l}{60EI}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\frac{EI}{l^2}\Delta\begin{Bmatrix} -6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta}{60l}\begin{Bmatrix} -48 \\ 12 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta}{5l}\begin{Bmatrix} -4 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow D_1 = -\frac{4\Delta}{5l}; D_2 = \frac{\Delta}{5l}$$

Moment và lực cắt tại các mặt cắt 1,2,...6 gây ra do từng chuyển vị D_1 và D_2 bằng đơn vị được tính theo phụ lục 3.

$$[M_u] = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};\ [V_u] = \frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 0 \\ -6 & -6 \\ 6 & 6 \\ 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Đường cong biến dạng của dầm do dịch chuyển Δ của điểm A biểu diễn trên Hình 12.8f. Nội lực tại các mặt cắt tính được từ phương trình 12.5. Biểu đồ lực cắt và biểu đồ mô men biểu diễn trên Hình 12.8g và h.

$$\{M\} = \frac{EI}{l^2}\Delta\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\frac{\Delta}{l}\begin{Bmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2}\Delta\begin{Bmatrix} 4{,}4 \\ 2{,}8 \\ -2{,}8 \\ -0{,}8 \\ 0{,}8 \\ 0{,}4 \end{Bmatrix};$$

$$\{V\} = \frac{EI}{l^3}\Delta\begin{Bmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 0 \\ -6 & -6 \\ 6 & 6 \\ 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\frac{\Delta}{l}\begin{Bmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2}\Delta\begin{Bmatrix} -7{,}2 \\ 7{,}2 \\ 3{,}6 \\ -3{,}6 \\ -1{,}2 \\ 1{,}2 \end{Bmatrix}.$$

Để kiểm tra kết quả tính toán ta dùng điều kiện cân bằng tại điểm B và C, ở đó tổng mô men phải bằng không.

Xét trường hợp tải (b) như trên Hình 12.7i. Để tạo ra chuyển vị xoay tại điểm B ta cần có một mô men F_1^* (cặp ngẫu lực) tác động vào điểm B. Ta gọi vectơ ngoại lực là $\{F\} = \{F_1^*, 0\}$. Khi đó quan hệ giữa lực và chuyển vị được biểu diễn qua

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^* \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ma trận độ cứng S đã xác định trong trường hợp tải (a). Ta có $D_1=\theta$, từ phương trình thứ hai ta xác định được D_2

$$D_2 = -\frac{S_{21}}{S_{22}} D_1 = -\frac{2EI/l}{8EI/l}\theta = -\frac{\theta}{4}$$

Trong trường hợp này nội lực tại các mặt cắt trong điều kiện hạn chế bằng không $\{M_r\} = 0$; $\{V_r\} = 0$. Dùng phương trình 12.5 với các ma trận M_u và V_u đã tính được từ trường hợp (a) ta tính được nội lực tại các mặt cắt

$$\{M\} = +\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \theta \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.25 \end{Bmatrix} = \frac{EI\theta}{l} \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3{,}5 \\ 1 \\ -1 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix};$$

$$\{V\} = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 0 \\ -6 & -6 \\ 6 & 6 \\ 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \theta \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.25 \end{Bmatrix} = \frac{EI\theta}{l^2} \begin{Bmatrix} -6 \\ 6 \\ -4{,}5 \\ 4{,}5 \\ 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{Bmatrix}.$$

12.5 Ảnh hưởng của chuyển vị tại các tọa độ

Trường hợp tải (b) trong Ví dụ 12.5 sẽ được tổng quát hóa trong mục này. Giả thiết hệ có n bậc tự do.

Mục đích của ta tìm ảnh hưởng của m chuyển vị cho trước Δ_1, Δ_2, …, Δ_m tại m tọa độ. Ta viết ma trận độ cứng sao cho toạ độ ứng với các chuyển dịch cho trước sẽ nằm ở m dòng và cột đầu

$$[S]=\left[\begin{array}{cccc|ccc} S_{11} & S_{12} & \Lambda & S_{1m} & S_{1,m+1} & \Lambda & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ S_{m1} & S_{m2} & \Lambda & S_{mm} & S_{m,m+1} & \Lambda & S_{11} \\ \hline S_{m+1,1} & S_{m+1,2} & \Lambda & S_{m+1,m} & S_{m+1,m+1} & \Lambda & S_{11} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ S_{n1} & S_{n2} & \Lambda & S_{n,m} & S_{n,m+1} & \Lambda & S_{nn} \end{array}\right]; \tag{12.7}$$

Ma trận này có thể viết dưới dạng

$$[S]=\left[\begin{array}{c|c} [S_{11}] & [S_{12}] \\ \hline [S_{21}] & [S_{22}] \end{array}\right] \tag{12.8}$$

ở đây $[S_{ij}]$ là các ma trận con.

Chúng có kích cỡ như sau $[S_{11}]_{mxm}$, $[S_{11}]_{mx(n-m)}$, $[S_{11}]_{(n-m)xm}$, $[S_{11}]_{(n-m)x(n-m)}$.

Cần phải có m lực $F_1^*, F_2^*, \Lambda, F_m^*$ tác động vào các tọa độ từ 1 đến m để có được các chuyển vị Δ_1, Δ_2, ...,Δ_m. Vì không có ngoại lực nên tại n-m toạ độ còn lại sẽ xuất hiện chuyển vị D_{m+1}, D_{m+2},..., D_n. Quan hệ giữa lực và chuyển vị được viết

$$\left[\begin{array}{c|c} [S_{11}] & [S_{12}] \\ \hline [S_{21}] & [S_{22}] \end{array}\right]\begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \{D_2\} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \{F_1^*\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{12.9}$$

ở đây $\{D_1\}$ là vectơ các chuyển vị cho trước Δ, $\{D_2\}$ là vectơ các chuyển vị chưa biết D_{m+1}, D_{m+2},..., D_n và vectơ $\{F_1^*\}$ là vectơ các lực chưa biết tại các tọa độ 1,2,...,m.

Từ dòng thứ hai của phương trình ma trận (12.8) ta tìm được

$$\{D_2\}=-[S_{22}]^{-1}[S_{21}]\{D_1\} \tag{12.10}$$

Khi đã biết chuyển vị tại n tọa độ ta có thể tìm đáp ứng tại mặt cắt bất kỳ bằng phương trình

$$\{A\}=[A_u]\{D\} \tag{12.11}$$

Phương trình này như phương trình (12.5) với vectơ $\{A_r\}$=0, vì đáp ứng chỉ do ảnh hưởng của chuyển vị {D} thôi.

Nếu cần tính vectơ lực $\{F_1^*\}$ ta có phương trình

$$\{F_1^*\}=[[S_{11}]-[S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}]]\{D_1\} \tag{12.12}$$

12.6 Sử dụng phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

12.6.1 Quan hệ giữa ma trận độ mềm và ma trận độ cứng

Ta sẽ tìm quan hệ giữa ma trận độ cứng và ma trận độ mềm. Trên Hình 12.7 biểu diễn hệ tọa độ với n tọa độ ứng với ví trị và hướng của các chuyển vị D_1, D_2, ..., D_n và các lực F_1, F_2, ..., F_n. Các thành phần của vectơ chuyển vị {D} có thể biểu diễn qua các thanh phần của vectơ lực {F} bằng hệ phương trình

$$\begin{aligned}
&D_1 = f_{11}F_1 + f_{12}F_2 + \Lambda\ + f_{1n}F \\
&D_2 = f_{21}F_1 + f_{22}F_2 + \Lambda\ + f_{2n}F \\
&\Lambda \quad \Lambda \\
&D_n = f_{n1}F_1 + f_{n2}F_2 + \Lambda\ + f_{nn}F
\end{aligned}$$

Hệ số f_{ij} là hệ số ảnh hưởng độ mềm, chúng là chuyển vị đơn vị tại tọa độ thứ i khi chỉ có một lực đơn vị tác động tại tọa độ j. Có thể viết dưới dạng ma trận:

$$[f]_{n\times n}\{F\}_{n\times 1} = \{D\}_{n\times 1} \tag{12.13}$$

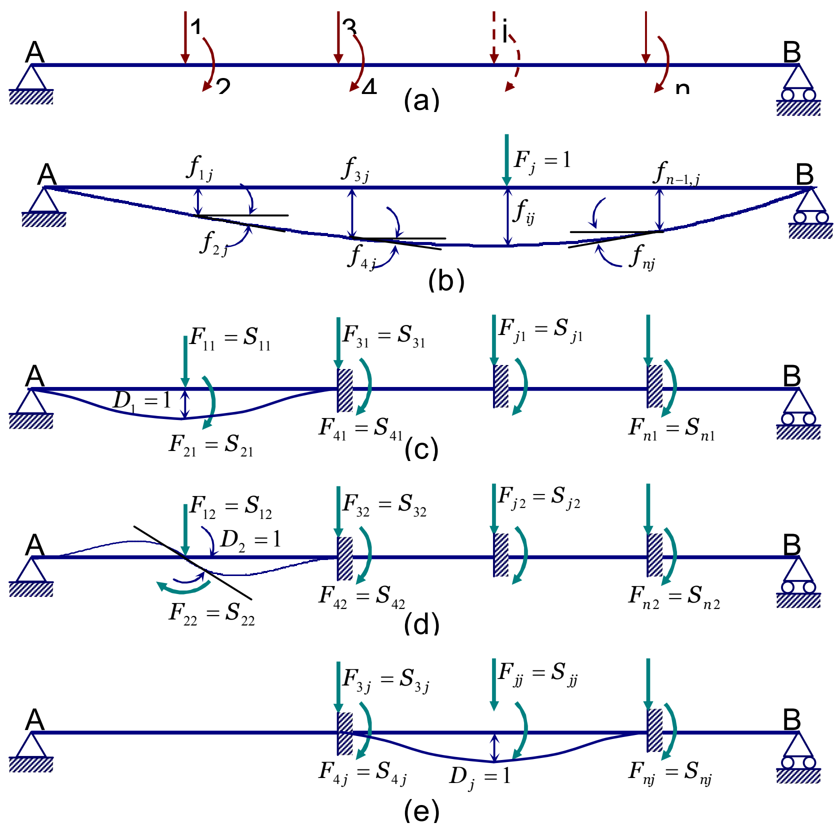
Không nên nhầm lẫn phương trình này với phương trình 10.4 [f]{F}={-D} dùng trong phương pháp lực để tìm giá trị của lực dư {F} gây ra chuyển vị {-D} điều chỉnh sai lệch chuyển vị {D} gây ra do giải phóng liên kết.

Lực {F} có thể biểu diễn qua chuyển vị khi giải phương trình 12.13

$$\{F\}_{n\times 1} = [f]_{n\times n}^{-1}\{D\}_{n\times 1} \tag{12.14}$$

Phương trình 12.14 có thể dùng để xác định lực tạo thành các phần tử của ma trận độ cứng của cùng kết cấu đang xét. Nếu ta cho kết cấu biến dạng theo cấu hình mà D_1=1 còn các thành phần chuyển vị khác D_2=D_3=...=D_n=0 (Hình 12.9c) ta được

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ \Lambda \\ F_{n1} \end{Bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \Lambda \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Hình 12.9. Hệ tọa độ của phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

Tương tự ta cho kết cấu biến dạng theo cấu hình mà D_2=1 còn các thành phần chuyển vị khác $D_1=D_3=...=D_n=0$ (Hình 12.9d) ta được

$$\begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \\ \Lambda \\ F_{n2} \end{Bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \Lambda \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tổng quát ta cho kết cấu biến dạng ở cấu hình mà D_j=1, còn các thành phần chuyển vị khác bằng không (Hình 12.9e), ta nhận được hệ phương trình giống như hai phương trình vừa viết ở trên. Tất cả phương trình này có thể gộp lại trong một phương trình ở dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \Lambda & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & & F_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & & \\ F_{n1} & F_{n2} & \Lambda & F_{nn} \end{bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & & \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 \end{Bmatrix}$$

Các lực F_{ij} trong ma trận bên trái thực chất là các phần tử của ma trận độ cứng cần tính. Ma trận cuối là ma trận đơn vị, do vậy

$$[S] = [f]^{-1} \tag{12.15}$$

ở đây [S] là ma trận độ cứng ứng với tọa độ đã cho. Nghịch đảo cả hai vế ta được

$$[S] = [f]^{-1} \tag{12.16}$$

Phương trình 12.15 và 12.16 chỉ ra rằng ma trận độ cứng là nghịch đảo của ma trận độ mềm và ngược lại ứng với cùng hệ tọa độ lực và chuyển vị dùng để thiết lập hai ma trận này.

Tuy nhiên ta biết phương pháp lực ta giải phòng liên kết để kết cấu thành tĩnh định. Hệ tọa độ thể hiện ví trí và hướng của các lực dư. Còn trong phương pháp chuyển vị ta đưa vào các lực để hạn chế chuyển vị nút. Hệ tọa độ trong trường hợp này biểu diễn vị trí và hướng của chuyển vị chưa biết. Suy ra hai hệ toa độ không thể như nhau. Do vậy nghịch đảo của ma trận độ mềm trong phương pháp lực là ma trận độ cứng nhưng không thể dùng trong phương pháp chuyển vị. Tương tự như vậy, nghịch đảo của ma trận độ cứng trong phương pháp chuyển vị là một ma trận độ mềm nhưng không thể dùng cho phương pháp lực.

12.6.2 Lựa chọn phương pháp

Việc lựa chọn phương pháp phân tích kết cấu chủ yếu xem xét việc thiết lập ma trận độ cứng và ma trận đồ mềm, nếu việc thiết lập ma trận nào dễ hơn ta chọn phương pháp tương ứng. Ví dụ trên Hình 12.10a ma trận độ cứng có thể thiết lập dễ dàng dùng phụ lục 3. Các chuyển vị đơn vị tại nút j chỉ gây ra các lực tại j và hai nút j-1, j+1 liền kề. Ví dụ như trên Hình 12.10c, ta chỉ cần tính S_{11}, S_{21}, S_{31}, S_{41} còn các thành phần khác bằng không. Mặt khác nếu sử dụng phương pháp lực khi thiết lập cột thứ j của ma trận độ mềm ta phải đặt một lực đơn vị và tính tất cảc các chuyển vị. Trong ví dụ này ta thấy việc lập ma trận độ mềm nặng nhọc hơn lập ma trận độ cứng. Nhưng không phải lúc nào việc thiết lập ma trận cứng cũng dễ hơn thiết lập ma trận độ mềm, như Ví dụ 12.6.

Xem xét một cách tổng quát ta thấy trong phương pháp lực việc lực chọn liên kết để giải phóng có thể ảnh hưởng đến số phép tính cần tính. Ví dụ như dầm liên tục nếu ta đặt các khớp ở gối đõ đưa hệ về các dầm đơn giản khi đó lực dư đơn vị chỉ ảnh hưởng đến hai dầm liền kề. Những kết cấu khác không thể tìm được lực dư mà chỉ gây ảnh hưởng địa phương. Thông thường dưới từng lực dư đơn vị riêng biệt có tác động đến chuyển vị ở tất cả các tọa độ.

Trong phương pháp chuyển vị, tất cả các chuyển vị bị hạn chế không phụ thuộc vào việc lực chọn chuyển vị cần tìm. Thiết lập ma trận độ cứng nói chung là dễ vì các hiệu ứng địa phương thường đã được xem xét từ trước. Chuyển vị đơn vị ở một nút chỉ ảnh hưởng đến các phần tử nối vào nút đó. Hai tính chất này làm cho phương pháp chuyển vị dễ thiết lập hơn, và cũng là hai lý do rằng phương pháp chuyển vị thích hợp cho lập trình tính toán bằng máy tính.

Khi tính toán bằng tay, việc giảm bớt số phương trình cần tính toán rất quan trọng. Việc lựa chọn phương pháp lực hay phương pháp chuyển vị phụ thuộc vào bậc siêu tĩnh hay bậc tự do nhỏ hơn. Không có nguyên tắc tổng quát.

Trong phương pháp chuyển vị ta có thể giảm số phương trình bằng cách chỉ hạn chế một số chuyển vị đủ để có thể phân tích kết cấu (xem Ví dụ 12.9).

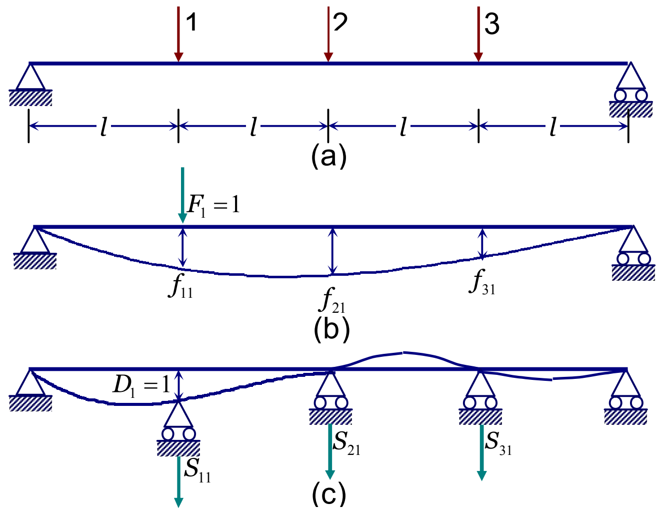
Ví dụ 12.6. Xét dầm trên Hình 12.10a, với ba tọa độ.

Từng cột của ma trận độ mềm được xác định dùng phụ lục 3 tính chuyển vị khi đặt lực dư đơn vị (Hình 12.10b), ta được

$$[f]=\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

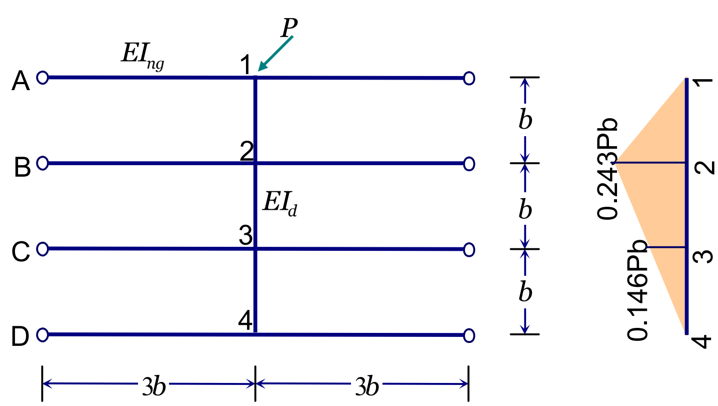
Để thiết lập ma trận độ cứng mỗi cột của [S] đòi hỏi phải phân tích một kết cấu siêu tĩnh. Ví dụ như khi thiết lập cột thứ nhất ta phải xem xét kết cấu ở biến dạng ở cấu hình như trên Hình 12.10c – là hệ có ba bậc siêu tĩnh. Ta được

$$[S] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 9{,}857 & -9{,}429 & 3{,}857 \\ -9{,}429 & 13{,}714 & -9{,}429 \\ 3{,}857 & -9{,}429 & 9{,}857 \end{bmatrix} = [f]^{-1}$$



Hình 12.10. So sánh giữa phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

Ví dụ 12.7. Khung ngang trên Hình 12.11 gồm 4 dầm ngang chính và một dầm dọc trên mặt cầu có độ cứng EI_{ngang}:EI_{doc}=3:1. Độ cứng xoắn bỏ qua. Vẽ biểu đồ mô men của dầm dọc dưới tác động của lực dọc tập trung tại nút 1.



Hình 12.11. Hệ khung ngang và biểu đồ nội lực

Tại mỗi nút có 3 bậc tự do gồm: một chuyển vị dọc và hai góc xoay quay trục trong mặt phẳng của khung ngang. Tuy nhiên nếu ta hạn chế chuyển vị dọc thì hệ trở thành hệ các dầm liên tục, dùng Phụ lục 4 ta có tính toán ảnh hưởng của dịch chuyển nút không cần biết góc xoay.

Ta xét hệ tọa độ gồm 4 chuyển vị thẳng đứng tại nút 1, 2, 3 và 4, quy ước dấu dương hướng xuống. Ma trận độ cứng có thể thiết lập sử dụng các giá trị ở các bảng trong phụ lục 4 cho trường hợp dầm hai nhịp đối với dầm chính và trường hợp dầm ba nhịp cho dầm dọc. Cột đầu tiên của ma trận độ cứng được tính toán như sau.

Cho chuyển vị D_1=0 còn D_2=D_3=D_4=0, khi đó chỉ có dầm chính A và dầm dọc biến dạng còn các dầm khác không bị biến dạng. Các nút cho phép quay tự do. Sau đó đặt các lực dọc để giữ cho dầm A và dầm dọc ở cấu hình này. Xem Bảng PL4.1 ở trường hợp dầm hai nhịp, tìm trong bảng phản lực tại dòng 2 và cột hai (vì gối đỡ thứ hai lún 1 đơn vị và xét phản lực tại gối đỡ thứ hai) ta được

$$S_{11} = 6\frac{EI_{ng}}{(3b)^3} = \frac{2}{3}\frac{EI_d}{b^3}$$

Đối với dầm dọc ta tìm trường hợp dầm ba nhịp xem trong bảng phản lực lấy toàn bộ các phần tử trên hàng thứ nhất ta được

$$S_{11} = 1{,}6\frac{EI_d}{b^3};\ S_{21} = -3{,}6\frac{EI_d}{b^3};\ S_{31} = 2{,}4\frac{EI_d}{b^3};\ S_{41} = -0{,}4\frac{EI_d}{b^3}$$

Như vậy cột thứ nhất của ma trận độ cứng có dạng

$$S_{11} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 1{,}6\frac{EI_d}{b^3};\ S_{21} = -3{,}6\frac{EI}{b^3};\ S_{31} = 2{,}4\frac{EI}{b^3};\ S_{41} = -0{,}4\frac{EI}{b^3}$$

Tương tự, cho các trường hợp cấu hình biến dạng khác ta vẫn dùng bảng PL4.1 trong Phụ lục 4. Dầm ngang chính vẫn dùng phần tử thứ 2 trong dòng thứ 2 của bảng phản lực cho trường hợp dầm hai nhịp. Còn đối với dầm dọc lần lượt dùng dòng thứ 2, 3 và 4 của bảng phản lực cho trường hợp dầm ba nhịp. Ta có

$$S_{12} = -3.6\frac{EI_d}{b^3};\ S_{22} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 9.6\frac{EI}{b^3};\ S_{32} = -8.4\frac{EI}{b^3};\ S_{42} = 2.4\frac{EI}{b^3}$$

$$S_{13} = 2.4\frac{EI}{b^3};\ S_{23} = -8.4\frac{EI}{b^3};\ S_{33} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 9.6\frac{EI}{b^3};\ S_{43} = -3.6\frac{EI_d}{b^3}$$

$$S_{14} = -0.4\frac{EI}{b^3}\quad S_{24} = 2.4\frac{EI}{b^3};\ S_{34} = -3.6\frac{EI_d}{b^3};\ S_{44} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 1.6\frac{EI_d}{b^3}$$

$$[S]=\frac{EI}{b^3}\begin{bmatrix}2{,}267 & -3{,}6 & 2{,}4 & -0{,}4\\ -3{,}6 & 10{,}267 & -8{,}4 & 2{,}4\\ 2{,}4 & -8{,}4 & 10{,}267 & -3{,}6\\ -0{,}4 & 2{,}4 & -3{,}6 & 2{,}267\end{bmatrix}$$

Với tải trọng P tác động vào điểm 1, ta cần lực hạn chế chuyển vị có hướng ngược tại với P, vậy {F}={-P,0,0,0}. Giải phương trình 12.2. ta tìm được chuyển vị

$$\{D\}=\frac{Pb^3}{EI_d}\begin{Bmatrix}1{,}133\\ 0{,}511\\ 0{,}076\\ -0{,}221\end{Bmatrix}$$

Moment uốn trên dầm dọc bằng không tại điểm 1 và 4 do vậy cần xác định mô men tại điểm 2 và 9. Quy ước mô men uốn dương nếu làm cho sợi ở đáy bị kéo. Trong trường hợp này lực P tác động vào nút nên vectơ $\{A_r\}$=0. Khi tải trọng tác động vào vị trí khác thì cần phải xác định $\{A_r\}$ bằng cách tính toán các dầm liên tục với các nhịp bằng nhau qua các gối đỡ cố định.

Phần tử của ma trận $[A_u]$ xác định từ Bảng PL4.1 trong phụ lục 4 cho trường hợp dầm 3 nhịp xem phản lực tại gối đỡ.

$$[A_u]=\frac{EI_d}{b^2}\begin{bmatrix}-1{,}6 & 3{,}6 & -2{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}4 & -2{,}4 & 3{,}6 & -1{,}6\end{bmatrix}$$

Từ đó ta tính được dùng (12.5)

$$\{A\}=\frac{EI_d}{b^2}\begin{bmatrix}-1{,}6 & 3{,}6 & -2{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}4 & -2{,}4 & 3{,}6 & -1{,}6\end{bmatrix}\frac{Pb^3}{EI_d}\begin{Bmatrix}1{,}133\\ 0{,}511\\ 0{,}076\\ -0{,}021\end{Bmatrix}=Pb\begin{Bmatrix}-0{,}243\\ -0{,}146\end{Bmatrix}$$

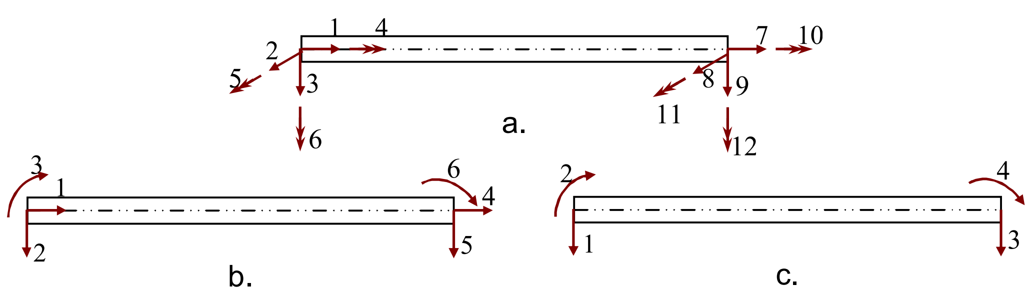
Biểu đồ mô men cho trên Hình 12.11

12.6.3. Ma trận độ cứng cho dầm thẳng

Trong chương 3 ta dùng phụ lục 3 tìm các lực đầu phần tử của từng thanh riêng biệt, sau đó cộng lực đầu của tất cả các phần tử nối vào từng nút. Ở đây ta thiết lập ma trận độ cứng cho một thanh thẳng riêng biệt, vì ta sẽ dùng thường xuyên trong phân tích hệ khung. Ta xét phần tử dầm với 12 tọa độ tại hai đầu nút gồm các chuyển vị thẳng và góc xoay theo các trục x, y và z Hình 12.10a. Ký hiệu độ dài thanh là l, diện tích mặt cắt là a, mô men bậc hai của diện tích đối với trục z và trục y là I_z, I_y, hằng số đàn hồi là E, và độ cứng xoắn là GJ.

Khi bỏ qua biến dạng trượt và hiệu ứng vặn, mọi phần tử của ma trận độ cứng có thể thiết lập nhờ phụ lục 3. Phần tử thứ i bất kỳ tại cột j bằng lực tại tọa độ i đó do chuyển vị đơn vị tại tọa độ j gây ra. Ma trận độ cứng sẽ có dạng

$$[S]=\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{Ea}{l} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_z}{l^3} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & & & & & & & \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & & & & sym & & & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & & & & & & \\
\hline
-\frac{Ea}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ea}{l} & & & & & \\
0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & & & & \\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l}
\end{array}\right] \quad (12.17)$$



Hình 12.11 Phần tử phẳng

Nếu xét bài toán trong mặt phẳng x-y, thì ma trận độ cứng chỉ xét cho 6 tọa độ là các tọa độ 1, 2, 6, 7, 8, và 12 Hình 12.11b. Xóa các cột và các hàng 3, 4, 5, 9,10 và 11 ta được ma trận

$$[S]=\begin{bmatrix} \frac{Ea}{l} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & sym & \\ -\frac{Ea}{l} & 0 & 0 & \frac{Ea}{l} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \qquad (12.18)$$

Nếu bỏ qua lực dọc trục ta sẽ không xét tọa độ 1 và 4 nữa Hình 12.11c vậy ma trận độ cứng của dầm thẳng chỉ còn kích cỡ là 4x4

$$[S]=\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & & & \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & sym & \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \qquad (12.19)$$

Những ma trận độ cứng này được thiết lập cho trục tọa độ với trục x trùng với trục của dầm. Khi hệ trục này gọi là hệ trục tọa độ địa phương, khi xét trong hệ tọa độ tổng thể thì ta phải dùng ma trận chuyển để chuyển ma trận độ cứng về hệ tọa độ tổng thể.

12.6.4. Giản lược ma trận độ cứng

Ta có quan hệ giữa chuyển vị {D} và lực {F} đặt ở cùng một tọa độ

$$[S]\{D\}=\{F\} \qquad (12.20)$$

Nếu chuyển vị tại một số tọa độ bị ngăn cản do có các liên kết và ma trận [S] bố trí sao cho phương trình ứng với các tọa độ này nằm ở phía dưới ta có

$$\left[\begin{array}{c:c} [S_{11}] & [S_{12}] \\ \hdashline [S_{21}] & [S_{22}] \end{array}\right]\begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \{D_2\} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \qquad (12.21)$$

trong đó $\{D_2\}=0$ đại diện cho các chuyển vị đã bị hạn chế. Từ đây ta có thể viết

$$[S_{11}]\{D_1\} = \{F_1\} \tag{12.22}$$

$$[S_{21}]\{D_1\} = \{F_2\} \tag{12.23}$$

Từ phương trình 12.22 ta nhận thấy ma trận độ cứng của những tọa độ còn lại có thể nhận được bằng cách xóa các cột và các dòng ứng với tọa độ đã bị hạn chế chuyển dịch. Ma trận độ cứng nhận được sẽ có bậc nhỏ đi. Từ phương trình 12.23 nếu ta biết các chuyển vị $\{D_1\}$ ta có thể tính được phản lực tại các gối đỡ ngăn cản chuyển vị $\{D_2\}$.

Ví dụ trên Hình 12.11c ta giả thiết hai chuyển vị thẳng đứng 1 và 3 bị hạn chế, như vậy ma trận độ cứng ứng với hai tọa độ còn lại (2 và 4) sẽ nhận được bằng cách xóa các dòng và các cột thứ nhất và thứ ba trong ma trận (12.19)

$$[S] = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{l} & sym \\ \dfrac{2EI}{l} & \dfrac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{12.24}$$

Phản lực $\{F_1, F_3\}$ tìm được từ phương trình

$$[S] = \begin{bmatrix} \dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{6EI}{l^2} \\ -\dfrac{6EI}{l^2} & -\dfrac{6EI}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{12.25}$$

Nếu ta biết lực bằng không ở một số tọa độ, có nghĩa tại tọa độ đó tự do chuyển động. Ma trận độ cứng ứng với các tọa độ còn lại có thể tính được từ các ma trận con trong phương trình 12.21. Cho $\{F_2\}=0$ trong phương trình 12.21 ta có

$$\left.\begin{array}{l} [S_{11}]\{D_1\} + [S_{12}]\{D_2\} = \{F_1\} \\ \text{and} \\ [S_{21}]\{D_1\} + [S_{22}]\{D_2\} = \{0\} \end{array}\right\} \tag{12.26}$$

Từ phương trình thứ hai ta giản ước $\{D_2\}$ trong phương trình thứ nhất và có

$$\left[[S_{11}] - [S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}]\right]\{D_1\} = \{F_1\} \tag{12.27}$$

phương trình này giống phương trình 12.12. Ta viết lại thành

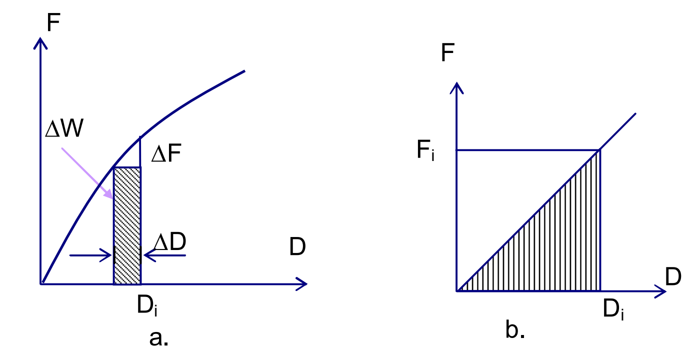
$$[S^*]\{D_1\} = \{F_1\} \tag{12.28}$$

ở đây ma trận $[S^*]$ là ma trận độ cứng giản lược liên hệ giữa lực $\{F_1\}$ với chuyển vị $\{D_1\}$, và có dạng

$$\left[S^*\right] = \left[S_{11}\right] - \left[S_{12}\right]\left[S_{22}\right]^{-1}\left[S_{21}\right] \qquad (12.29).$$

12.6.5 Tính chất của ma trân độ mềm và ma trận độ cứng

Xét lực F_i tác dụng từ từ lên kết cấu, sao cho động năng của khối lượng bằng không. Ký hiệu D_i là chuyển vị do lực F_i gây ra tại chính điểm đặt lực và có cùng hướng với lực F_i. Nếu kết cấu đàn hồi thì quan hệ giữa lực và chuyển vị là đường cong (gia tải và cất tải như nhau) trên Hình 12.12a.



Hình 12.12

Tại một thời điểm nào đó lực F_i tăng lên ΔF_i và chuyển vị tăng tương ứng lên ΔD_i thì công thực hiện bởi ΔF_i là

$$\Delta W \approx F_i \Delta D_i$$

Là hình chữ nhật gạch chéo trên Hình 12.12a. Nếu gia tải đủ nhỏ thì công ngoại lực thực hiện bởi F_i sẽ bằng phần diện tích bên dưới đường cong giữa 0 và D_i.

Khi vật liệu tuân thủ định luật Hooke thì đường cong trên Hình 12.12a thay bằng đường thẳng trên Hình 12.12b. Khi đó công thực hiện bởi lực F_i có biểu thức

$$W = \frac{1}{2} F_i D_i$$

Nếu kết cấu chịu tác dụng của một hệ lực F_1, F_2, ..., F_n tăng từ từ và chúng gây ra các chuyển vị tương ứng D_1, D_2, ..., D_n tại các điểm và hướng như lực tác động thì công ngoại lực (công ngoại) biểu diễn qua

$$W = \frac{1}{2}\left(F_1 D_1 + F_2 D_2 + \Lambda + F_n D_n\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i D_i \tag{12.30}$$

Viết lại dưới dạng ma trận ta có

$$\left[W\right]_{1\times 1} = \frac{1}{2}\left\{F\right\}^{T}_{n\times 1}\left\{D\right\}_{n\times 1} \tag{12.31}$$

Thay chuyển vị bằng lực qua ma trận độ mềm ta có

$$\left[W\right]_{1\times 1} = \frac{1}{2}\left\{F\right\}^{T}_{n\times 1}\left[f\right]_{n\times n}\left\{F\right\}_{n\times 1} \tag{12.32}$$

Ta làm phép chuyển đổi cả hai vế, vế trái không đổi, với vế phải ta có nguyên tắc sau phép chuyển đổi một tích sẽ là tích của các ma trận đã chuyển đổi nhưng thứ tự ngược lại nên

$$\left[W\right]_{1\times 1} = \frac{1}{2}\left\{F\right\}^{T}_{n\times 1}\left[f\right]^{T}_{n\times n}\left\{F\right\}_{n\times 1} \tag{12.33}$$

Từ phương trình 12.32 và 12.33 ta thấy ma trận độ mềm và ma trận chuyển đổi của nó bằng nhau

$$\left[f\right] = \left[f\right]^{T} \Rightarrow f_{ij} = f_{ji} \tag{12.34}$$

Ma trận độ mềm là ma trận đối xứng. Đây là tính chất quan trọng của ma trận độ mềm.

Phương trình 12.15 chỉ ra rằng ma trận độ cứng là nghịch đảo của ma trận độ mềm nên suy ra *ma trận độ cứng cũng đối xứng*

$$S_{ij} = S_{ji}\,. \tag{12.35}$$

Tính chất quan trọng thứ hai của ma trận độ cứng và độ mềm là *các phần tử đường chéo S_{ii} và f_{ii} phải dương*. f_{ii} là chuyển vị tại tọa độ i dưới tác động của lực đơn vị cũng vào điểm i nên chuyển vị phải cùng hướng với lực nên f_{ii} dương. Còn

S_{ii} là lực cần đặt vào tọa độ i sao cho gây nên chuyển vị đơn vị tai điểm i, do vậy S_{ii} có cùng hướng.

Phương trình 12.32 biểu diễn công ngoại lực qua lực và ma trận độ mềm, nếu thế lực bằng biểu thức 12.20 vào phương trình 12.31 ta được biểu diễn công ngoại lực qua chuyển vị và ma trận độ cứng

$$W = \frac{1}{2}\{F\}^T[f]\{F\} \tag{12.36}$$

và

$$W = \frac{1}{2}\{D\}^T[S]\{D\} \tag{12.37}$$

Đây là các dạng toàn phương theo biến F hay D. Dạng toàn phương là xác định dương nếu chúng dương với mọi vectơ khác không của biến, hơn nữa chúng bằng không khi và chỉ khi các vectơ biến bằng không. Định thức của các ma trận đối xứng xác định dương phải dương.

Như vậy ma trận độ cứng và ma trận độ mềm là *ma trận xác định dương*. Hệ phương trình

$$[S]\{D\} = \{F\}$$

và

$$[f]\{F\} = \{D\}$$

cũng sẽ xác định dương. Như vậy đối với một vectơ vế phải khác không hai hệ phương trình trên có *một nghiệm duy nhất.*

Kết luận chương 12

Phương pháp chuyển vị có thể dùng cho kết cấu bất kỳ đặc biệt có lợi khi hệ có bậc siêu tĩnh cao. Qui trình tính toán chuẩn có thể áp dụng dễ dàng cho hệ giàn, khung, khung ngang và các loại kết cấu khác dưới tác động của ngoại lực hay biến dạng cho trước. Như đã nói phương pháp lực rất thích hợp cho chương trình máy tính.

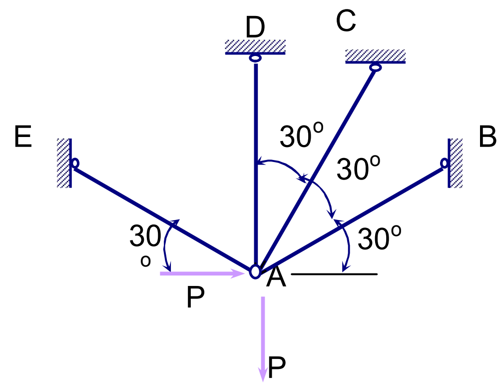
Ma trận độ cứng và ma trận độ mềm có quan hệ với nhau theo nghĩa chúng là nghịch đảo của nhau khi sử dụng cùng một hệ tọa độ của lực và chuyển vị. Tuy nhiên tọa độ lựa chọn trong phương pháp lực và phương pháp chuyển vị không cùng nhau nên quan hệ đó không đúng trong phân tích.

Lựa chọn phương pháp phân tích phụ thuộc vào bài toán và cả vào việc có dùng máy tính hay không. Phương pháp chuyển vị thích hợp cho việc lập trình để tính toán.

Ma trận độ cứng và độ mềm đối xứng, có các phần tử trên đường chéo lớn hơn không và chúng xác định dương. Như vậy lời giải của hệ phương trinh trong phương pháp lực cũng như phương pháp chuyển vị là duy nhất.

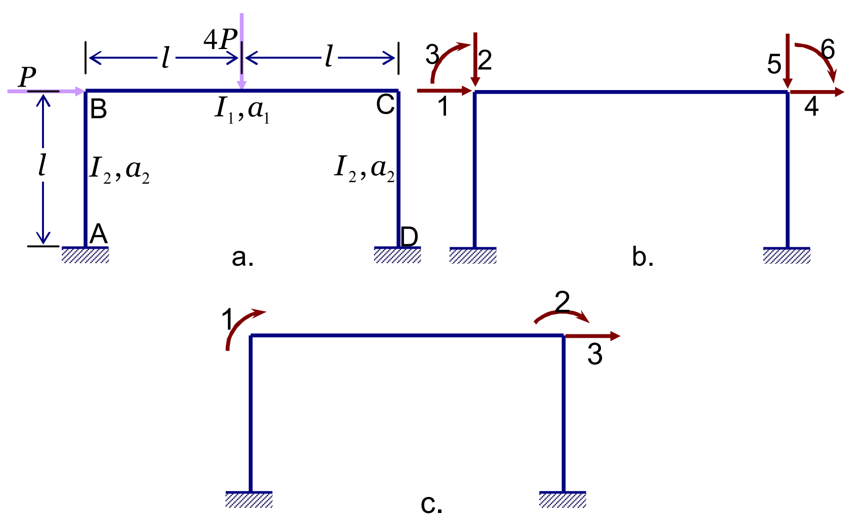
Bài tập chương 12

12.1. Dùng phương pháp chuyển vị tìm nội lực tại các phần tử của hệ giàn phẳng trên hình dưới. Giả thiết tất cả các phần tử có cùng giá trị l/aE.



Bài 12.1

12.2. Cho khung phẳng chịu lực ngang bằng P tác dụng vào điểm B từ phải sang và lực dọc 4P từ trên xuống tại điểm giữa của thanh BC (hình (a)).



Bài 12.2

Thiết lập ma trận độ cứng cho khung phẳng như trên hình vẽ với hai trường hợp

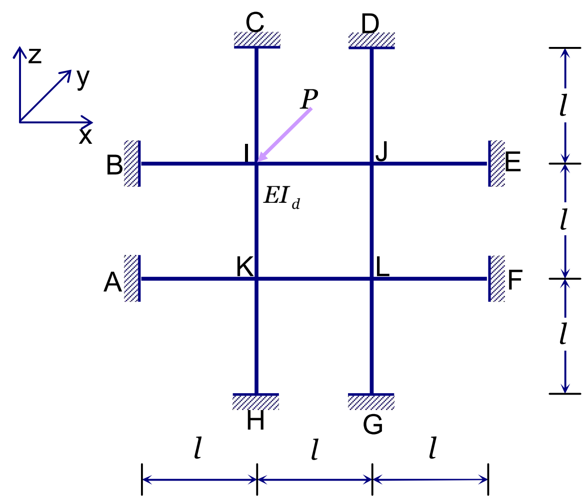
a. Sáu chuyển vị cần tìm (tại 2 nút B và C mỗi nút có 3 tọa độ) (hình (b)).

b. Bỏ qua biến dạng dọc trục (hình (c)).

c. Dùng phép giản lược tìm ma trận độ cứng S^* cho tọa độ 3 trên hình (c).

và tìm moment nội lực tại các mặt cắt đầu phần tử (M_{AB}, M_{BA}, M_{BC}, M_{CB}, M_{CD}, và M_{DC}) trong trường hợp b. Cho I_1=4I_2.

12.3. Cho khung ngang như trên hình vẽ với lực thẳng đứng P tác dụng vào điểm I.



Bài 12.3

Thiết lập ma trận độ cứng cho hai trường hợp

a. Tại mỗi nút I, J, K, L có 3 bậc tự do: chuyển vị thẳng đứng hướng xuống dưới theo trục y và hai góc xoay quoanh hai trục x và z. Lấy GJ/EI=0.5 cho tất cả các dầm.

b. Bỏ qua biến dạng xoắn (chỉ xét chuyển vị thẳng đứng)

và tìm moment nội lực tại các mặt cắt đầu phần tử ở hai thanh BE và AF trong trường hợp b.

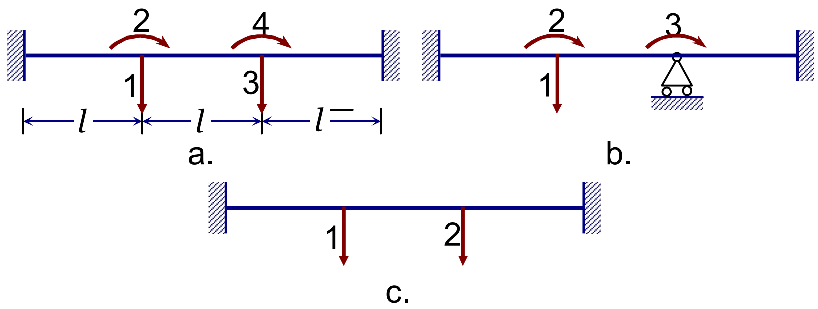
12.4. Trên hình vẽ là ba hệ tọa độ của dầm có độ cứng không đổi EI.

Thiết lập ma trận độ cứng

a. Cho 4 tọa độ (hình (a)).

b. Giản lược ma trận độ cứng cho 3 tọa độ (hình (b)).

b. Giản lược ma trận độ cứng cho 2 tọa độ (hình (c)).



Bài 12.4

CHƯƠNG 13.

Phương pháp công ảo

13.1. Thế năng biến dạng

Trong chương 3 ta đã nhắc đến khái niệm thế năng biến dang và trong các bài toán thanh ta cũng đã xem xét thế năng biến dạng của từng loại nội lực. Trong mục này trước khi đi vào chi tiết nguyên lí công ảo ta hệ thống lại các biểu thức thế năng biến dạng của từng loại nội lực.

Ta có công thức tính thế năng biến dạng đàn hồi tổng quát (3.2)

$$dU = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon dv$$

13.1.1. Thế năng biến dạng lực dọc trục

Xét đoạn dl có diện tích mặt cắt ngang a và độ dài l chịu một lực dọc trục N. Trong trường hợp này ứng suất pháp $\sigma = N/Ea$, biến dạng $\varepsilon = \sigma/E$. Như vậy từ phương trình (3.2) ta có tổng thế năng biến dạng

$$U = \frac{1}{2}\int_t \frac{N^2}{Ea}dl \tag{13.1}$$

Khi thanh thẳng ta có

$$U = \frac{1}{2}\frac{N^2 l}{Ea} \tag{13.2}$$

13.1.2. Thế năng biến dạng do mô men uốn

Xét đoạn dl chịu mô men uốn M quanh trục z, một trục chính của mặt cắt ngang (hình 13.1b). Ứng suất pháp tại phần tử da có khoảng cách $\overline{y}$ đến trục z là $\sigma = M\overline{y}/I$, biến dạng tương ứng $\varepsilon = \sigma/E = M\overline{y}/EI$. Như vậy từ phương trình (3.2) ta có thế năng biến dạng của phần tử

$$dU = \frac{1}{2}\frac{M^2\overline{y}^2}{EI^2}dv = \frac{1}{2}\frac{M^2\overline{y}^2}{EI^2}dadl$$

Lấy tích phân trên toàn bộ mặt cắt ngang của đoạn dl, ta tìm được Thế năng biến dạng

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI^2}dl\int_a \bar{y}^2 da$$

Tính phân bên vế phải chính là I, vậy

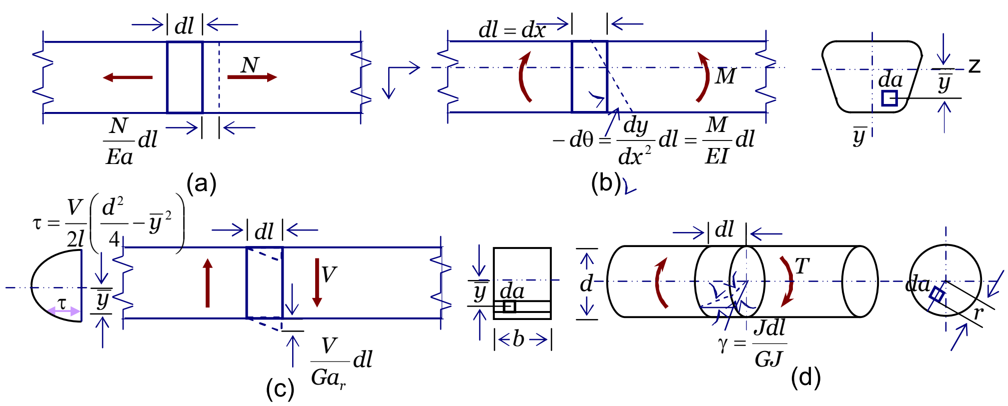
$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dl \tag{13.3}$$

Từ đó ta có tổng thế năng biến dạng do uốn

$$U = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dl \tag{13.4}$$

tích phân được lấy trên toàn bộ độ dài của phần tử kết cấu.

Trên hình 13.4b ta thấy hai mặt cắt chặn hai đầu của đoạn dl xoay đi so với nhau một góc $-d\theta = -\left(d^2y/dx^2\right)dl$ ở đây trục y hướng xuống dưới. Công ngoài do ngẫu lực M thực hiện để xoay đi một góc -dθ là



Hình 13.1.

$$\Delta W = -\frac{1}{2}Md\theta \tag{13.5}$$

Vì ngẫu lực dương (làm căng các sợi bên dưới) làm giảm góc nghiêng $\theta = dy/dx$ của trục biến dạng của dầm nên phương trình này mang dấu âm. Sự chênh lệch giữa góc nghiêng của đầu trai và đầu phải của đoạn dx chính là $-d\theta = -\left(d^2y/dx^2\right)$.

Vì công ngoại phải bằng công nội lực nên ta có $\Delta W = \Delta U$, từ phương trình (13.3) và (13.5)ta có

$$d\theta = -\frac{M}{EI}dl \tag{13.6}$$

Thế (13.4) vào ta nhận được tổng thế năng biến dạng do mô men uốn

$$U = -\frac{1}{2}\int Md\theta \tag{13.7}$$

13.1.3. Thế năng biến dạng do lực cắt

Xét đoạn dl chịu lực cắt V (hình 13.1c). Nếu lực cắt gây ra ứng suất tiếp τ, thì biến dạng trượt ε tại phần tử có diện tích da có dạng τ/G. Như vậy từ phương trình (3.2) ta có Thế năng biến dạng của đoạn dl

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int \frac{\tau^2}{G} dl \cdot da \tag{13.8}$$

Tích phân lấy trên toàn bộ mặt cắt ngang, sao cho giá trị của dU phụ thuộc sự thay đổi của lực cắt trên tọa bộ mặt cắt ngang. Ví dụ nếu mặt cắt ngang là hình chữ nhật thì

$$\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{d^2}{4} - \bar{y}^2\right) \tag{13.9}$$

ở đây b là bề rộng, d là chiều cao của hình chữ nhật còn $\bar{y}$ là khoảng cách của thớ sợi đến trục trung hòa và $I = bd^3/12$.

Thế (13.9) vào (13.8)

$$\Delta U = \frac{1}{2} \times \frac{V^2 dl}{4GI^2} \int_{-d/2}^{d/2} \left(\frac{d^2}{4} - \bar{y}^2\right)^2 b d\bar{y}$$

Ta nhận thấy bd=a là diện tích mặt cắt ngang, ta có

$$\Delta U = \frac{1}{2} \times \left(1.2\frac{V^2 dl}{Ga}\right) dl \tag{13.10}$$

Công thức này cho thanh có tiết diệt hình chữ nhật. Đối với tiết diện bất kỳ ta có công thức tổng quát

$$\Delta U = \frac{1}{2}\left(\frac{V^2}{Ga_r}\right) dl \tag{13.11}$$

Ở đây a_r là diện tích thu nhỏ cho trong các bảng trong các sách sức bền cho từng loại tiết diện thường gặp.

Từ phương trình 13.11 ta có tổng thế năng biến dạng do trượt

$$U = \frac{1}{2}\int\left(\frac{V^2}{Ga_r}\right)dl \qquad (13.12)$$

ở đây tích phân lấy trên toàn bộ độ dài của từng phần tử kết cấu

13.1.13.. Thế năng biến dạng do xoắn

Hình 13.1d biểu diễn đoạn dl của một thanh có tiết diện tròn chịu tác động của mô men xoắn T. Ứng suất trượt tại điểm có khoảng cách r đến tâm là $\tau = Tr/J$, ở đây J là mô men quán tích cực. Biến dạng tương ứng là $\varepsilon = \tau/G$. Từ phương trình (3.2) ta có thế năng biến dạng của đoạn dl

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int\frac{T^2r^2}{GJ^2}dl\cdot da = \frac{1}{2}\frac{T^2dl}{GJ^2}\int r^2da$$

Tích phân $\int r^2da = J$ là mô men quán tích cực. Như vậy $\Delta U = \frac{1}{2}\frac{T^2dl}{GJ}$ suy ra tổng thế năng biến dạng do xoắn sẽ là

$$U = \frac{1}{2}\int\frac{T^2dl}{GJ} \qquad (13.13)$$

Biểu thức này có thể áp dụng cho thanh có tiết diện khác với hình tròn. Trong trường hợp đó J là hằng số xoắn (đơn vị m^4) phụ thuộc vào hình dáng của tiết diện. Biểu thức của J có thể tìm trong phụ lục 5.

13.1.5. Tổng thế năng biến dạng

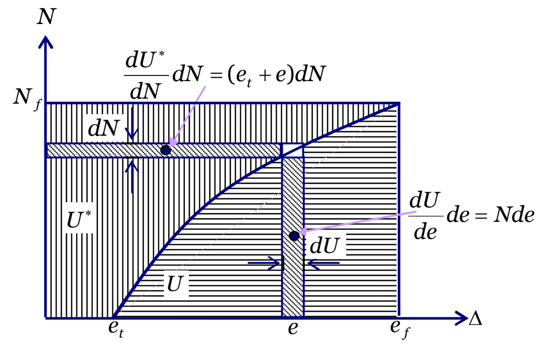
Nếu kết cấu chịu cả bốn loại nội lực như trên, khi đó thế năng biến dạng tổng thể sẽ là tổng của các năng lượng biến dạng cho trong các phương trình 13.1, 13.4, 13.12 và 13.13

$$U = \frac{1}{2}\int\frac{N^2dl}{Ea} + \frac{1}{2}\int\frac{M^2dl}{EI} + \frac{1}{2}\int\frac{V^2dl}{Ga_r} + \frac{1}{2}\int\frac{T^2dl}{GJ} \qquad (13.14)$$

Tích phân lấy trên toàn bộ chiều dài của từng phần tử kết cấu. Cần chú ý mỗi nội năng là tích của nội lực N, M, V và T tác động lên đoạn dl và thực hiện trên chuyển dịch tương ứng tại hai đầu nút của đoạn dl.

13.1.6. Năng lượng bù và công bù (bổ xung)

Khái niệm này có thể áp cho kết cấu bất kỳ. Nhưng ở đây ta sẽ xem xét trường hợp thanh chịu kéo nén của hệ dàn với các liên kết khớp. Giả sử thanh bị dãn một đoạn là e do lực kéo N, và một đoạn e_t do thay đổi của môi trường (ví dụ như nhiệt độ, hay co ngót v.v). Đặt Δ=e+e_t. Giả thiết ta có quan hệ giữa Δ và N như trên hình 13.2. Vậy khi ta đặt lực từ từ để đạt đến giá trị N_f và gây ra biến dạng e_f sao cho $\Delta_f=e_t+e_f$ thì thế năng biến dạng là $U=\int_0^{e_f} Nde$, chính bằng diện tích của phần gạch ngang trong hình 13.2.



Hình 13.2

Ta định nghĩa năng lượng bù là

$$U^*=\int_0^{N_f}\Delta dN \quad (13.15)$$

hoặc

$$U^*=N_f e_t+\int_0^{N_f} edN \quad (13.14a)$$

là diện tích phần gạch dọc trong hình 13.2.

Chú ý: khái niệm năng lượng bù không có ý nghĩa vật lý, ta sử dụng thuật ngữ này đơn thuần vì sự thuận tiện.

Từ hình 13.2. ta thấy tổng năng lượng bù và thế năng biến dạng bằng diện tích của hình chữ nhật $N_j(e_t+e_f)=U+U^*$

Khi độ dãn dài tăng từ e đến $(e+de)$, U sẽ tăng một lượng Nde, sao cho

$$\frac{dU}{de}=N \quad (13.16)$$

Đạo hàm tương ứng của U^* theo N sẽ bằng độ dãn dài Δ, vậy

$$\frac{dU^*}{dN}=e_t+e=\Delta \quad (13.17)$$

Nếu theo biểu đồ lực-chuyển vị (tương tự như biều độ lực-độ dãn dài trên hình 13.2) thì diện tích bên trái của đường cong là công bù W^* vậy

$$W^* = \int_0^{N_f} DdF \quad (13.18)$$

ở đây F_f là giá trị sau cùng của lực F và $D=d_t+d$ là tổng chuyển vị, d là chuyển vị do tác động của lực F, và d_t là chuyển vị do tác động của môi trương như nhiệt độ, co ngót, v.v.

Nếu lực F_1, F_2, ..., F_n tác động từ từ lên kết cấu và tổng chuyển vị tại các ví trí và hướng ứng với các lực này là D_1, D_2, ..., D_n, thì công bù sẽ là

$$W^* = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{F_{if}} D_i dF_i \quad (13.19)$$

ở đây F_{if} là giá trị sau cùng của F_i.

Công bù sẽ bằng công ngoại lực khi kết cấu đàn hồi tuyến tính và chuyển vị D chỉ do ngoại lực sinh ra ($d_t=0$) thì

$$W^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i D_i \quad (13.20)$$

13.2. Nguyên lý công ảo

13.2.1. Phát biểu chung

Nguyên lý công ảo liên hệ giữa hệ lực cân bằng với hệ chuyển vị tương thích trong kết cấu tuyến tính cũng như phi tuyến. Thực chất ta cho hệ lực giả tưởng (ảo) cân bằng hay chuyển vị ảo nhỏ tác động lên kết cấu và liên hệ với chuyển vị thực hay lực thực tương ứng. Có thể sử dụng hệ lực ảo hoặc chuyển vị ảo bất kỳ, sao cho hệ lực này thỏa mãn điều kiện cân bằng hay các chuyển vị này đảm bảo điều kiện tương thích. Điều này có nghĩa chuyển vị ảo là chuyển vị hữu hạn bất kỳ khả dĩ về mặt hình học có thể xảy ra. Chúng phải liên tục trong kết cấu và thỏa mãn các điều kiện trên biên. Với sự lựa chọn lực ảo và chuyển vị ảo thích hợp ta có thể dùng nguyên lý công ảo để tính chuyển vị và nội lực.

Xét kết cấu biến dạng dưới tác động của ngoại lực và môi trường như nhiệt độ hay co ngót. Ta gọi tổng năng lượng biến dạng thực tại một điểm bất kỳ là ε, và chuyển vị (thực) tương ứng tại n tọa độ đã chọn là D_1, D_2, ..., D_n. Giả thiết trước khi có tải trọng thực và biến dạng thực, kết cấu chịu hệ lực ảo là F_1, F_2, ..., F_n tại n tọa độ gây ra ứng suất σ tại điểm bất kỳ. Hệ lực ảo này cân bằng nhưng không nhất thiết phải ứng với chuyển vị thực {D}. Nguyên lý công ảo phát biểu: *tích của* *chuyển vị thực và lực ảo tương ứng (chính là công bù ảo) sẽ bằng với tích của chuyển vị nội thực với nội lực ảo tương ứng (chính là năng lượng bù ảo).* Vậy

Công bù ảo = Năng lượng bù ảo

Có thể biểu diễn dưới dạng tổng quát

$$\sum_{i=1}^{n} F_i D_i = \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv \qquad (13.21)$$

ở đây σ là ứng suất ứng với lực ảo F, và ε là biến dạng thực tương thích với chuyển vị thực {D}. Tích phân lấy trêh toàn bộ thể tích của kết cấu và tổng theo tất cả lực ảo {F}. Phương trình 13.21 phát biểu: *công bù của ngoại lực ảo và năng lượng bù của nội lực ảo khi chuyển động dọc theo chuyển vị thực bằng nhau*

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \text{lực ảo} \\ \text{tại i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{chuyển vị thực} \\ \text{tại i} \end{pmatrix} = \int_v \begin{pmatrix} \text{nội lực} \\ \text{ảo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{chuyển vị} \\ \text{nội thực} \end{pmatrix} dv$$

Nguyên lý công ảo dưới dạng này được áp dụng trong mục 13.2.2 để tính chuyển vị tại tọa độ bất kỳ khi qua biến dạng do nội lực thực gây ra. Nguyên lý này còn dùng để xác định ngoại lực tại một tọa độ từ nội lực. Khi đó ta cần chuyển vị ảo {D} tương thích với biến dạng ảo ε tại mọi điểm. Tích của ngoại lực thực {F} và chuyển vị ảo bằng với tích của nội lực thực và chuyển vị nội ảo tương thích với {D}. Quan hệ

Công ảo = Năng lượng ảo

Có thể biểu diễn theo 13.21

$$\sum_{i=1}^{n} F_i D_i = \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv$$

ở đây σ là ứng suất thực ứng với lực thực và ε là biến dạng ảo tương thích với chuyển vị ảo {D}. Trong trường hợp này ta phát biểu: *công ảo của ngoại lực và nội lực thực khi chuyển động dọc theo chuyển vị ảo bằng nhau*

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \text{lực thực} \\ \text{tại i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{chuyển vị ảo tại} \\ \text{i} \end{pmatrix} = \int_v \begin{pmatrix} \text{nội lực} \\ \text{thực} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{chuyển vị} \\ \text{nội ảo} \end{pmatrix} dv$$

Khi áp dụng nguyên lý công ảo để tính chuyển vị (hay lực) lực ảo (hay chuyển vị ảo) chọn sao cho vế bên phải của phương trình (13.21) cho ta định lượng cần thiết. Ta có thể làm dược điều này khi dùng định lý lực đơn vị hay định lý chuyển vị đơn vị để tính chuyển vị hay lực tương ứng.

13.2.2. Định lý lực đơn vị và chuyển vị đơn vị

Khi dùng nguyên lý công ảo để tính chuyển vị D_j tại tọa độ thứ j, ta sẽ chọn hệ lực ảo {F} sao cho nó chỉ chứa có một lực đơn vị tại tọa độ j. Khi đó 13.21 có dạng

$$1 \times D_j = \int_v \{\sigma_{uj}\}^T \{\varepsilon\} dv \quad \Rightarrow \quad D_j = \int_v \{\sigma_{uj}\}^T \{\varepsilon\} dv \qquad (13.22)$$

ở đây σ_{uj} là ứng suất ảo ứng với lực ảo đơn vị tại j, và ε là biến dạng thực do tải trọng thực gây ra. Phương trình này chính là định lý lực đơn vị, và là dạng tổng quát (không giới hạn ở tuyến tính) của phương trình (5.4) xây dựng cho hệ tuyến tính.

Nguyên lý công ảo còn dùng để tính lực tại tọa độ thứ j, nếu ta biết phân bố của ứng suất thực hay của nội lực. Ta chọn chuyển vị ảo D_j tại tọa độ thứ j, nhưng chuyển vị tại các điểm đạt lực khác không thay đổi. Ta sẽ xác định chuyển vị nội tương thích. Công ảo của nội lực và ngoại lực thực thực hiện trên chuyển vị ảo có này có dạng

$$F_j \times D_j = \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv \qquad (13.23)$$

Vì σ là ứng suất thực ứng với lực thực, và ε là biến dạng ảo tương thích với cấu hình của chuyển vị ảo.

Trong kết cấu đàn hồi tuyến tính, các thành phần biến dạng ε tại điểm bất kỳ tỷ lệ với giá trị của chuyển vị tại j, sao cho

$$\varepsilon = \varepsilon_{uj} D_j \qquad (13.24)$$

ở đây ε_{uj} là biến dạng tương thích với chuyển vị đơn vị tại j, vì không có chuyển vị tại các điểm đặt lực khác. Phương trình 13.35 sẽ có dạng

$$F_j = \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon_{uj}\} dv \qquad (13.25)$$

Phương trình này chính là định lý lực đơn vị,

Định lý này không áp dụng cho hệ phi tuyến vì ta đã sử dụng quan hệ 13.24, quan hệ tỉ lệ này chỉ đúng khi hệ là tuyến tính.

Định lý chuyển vị đơn vị là cơ sở để tính các đặc trưng độ cứng của phần tử kết cấu được áp dụng trong phần tử hữu hạn, khi kết cấu liên tục (bản, vật thể ba chiều) được chia làm những phần tử với các biên giả tưởng (hình tam giác, hình nón ba cạnh).

13.3. Tính chuyển vị bằng công ảo

13.3.1. Mô tả phương pháp

Xét kết cấu đàn hồi tuyến tính trên hình 13.3 chịu hệ lực F_1, F_2, ..., F_n gây nên ứng lực N, M, V và T tại mặt cắt bất kỳ. Công ngoại lực và công nội lực bằng nhau từ phương trình 3.2 và 13.14 ta có

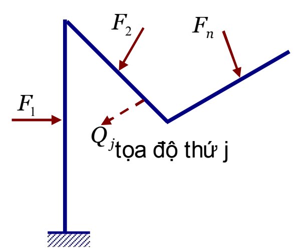
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i D_i = \frac{1}{2}\int \frac{N^2}{Ea}dl + \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dl + \frac{1}{2}\int \frac{V^2}{Ga_r}dl + \frac{1}{2}\int \frac{T^2}{GJ}dl \qquad (13.26)$$

ở đây D_i là chuyển vị tại vị trí và hướng của lực F_i, và N, M, V và T là ứng lực tại mặt cắt bất kỳ do hệ lực {F}.

Giả thiết tại thời điểm khi lực {F} tác động đã có lực ảo Q_j tác động vào vị trí và hướng của tọa độ thứ j (hình 13.6). Lực này gây ra ứng lực N_{Qj}, M_{Qj}, V_{Qj} và T_{Qj}. Công ngoại lực và công nội lực lúc này cũng phải bằng nhau

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i D_i + Q_j D_j = &\frac{1}{2}\left[\int \frac{N^2}{Ea}dl + \int \frac{M^2}{EI}dl + \int \frac{V^2}{Ga_r}dl + \int \frac{T^2}{GJ}dl\right] \\ &+ \left[\int \frac{N_{Qj}N}{Ea}dl + \int \frac{M_{Qj}M}{EI}dl + \int \frac{V_{Qj}V}{Ga_r}dl + \int \frac{T_{Qj}T}{GJ}dl\right]\end{aligned} \qquad (13.27)$$

ở đây D_j là chuyển vị tại j do hệ lực {F} tại hướng của lực ảo j. Số hạng thứ hai trong cả hai vế biểu diễn công của lực Q_j thực hiện khi chuyển động dọc theo chuyển vị gây ra bởi hệ lực {F}.



Hình 13.3

Lấy 13.27 trừ đi 13.26 ta được

$$Q_j D_j = \int \frac{N_{Qj}N}{Ea}dl + \int \frac{M_{Qj}M}{EI}dl + \int \frac{V_{Qj}V}{Ga_r}dl + \int \frac{T_{Qj}T}{GJ}dl \qquad (13.28)$$

Để xác định chuyển vị tại vị trí và hướng bất kỳ do hệ lực {F} gây ra ta chia 13.28 cho Q_j. Vậy ta có chuyển vị tại j là

$$D_j = \int \frac{N_{uj}N}{Ea}dl + \int \frac{M_{uj}M}{EI}dl + \int \frac{V_{uj}V}{Ga_r}dl + \int \frac{T_{uj}T}{GJ}dl \tag{13.29}$$

ở đây

$$N_{uj} = \frac{N_{Qj}}{Q_j} \qquad M_{uj} = \frac{M_{Qj}}{Q_j} \qquad V_{uj} = \frac{V_{Qj}}{Q_j} \text{ và } \qquad T_{uj} = \frac{T_{Qj}}{Q_j}$$

đây là nội lực tại mặt cắt bất kỳ do lực ảo đơn vị (Q_j=1) tại tọa độ j gây ra. Phương trình 13.29 là một trường hợp của định lý lực đơn vị áp dụng cho hệ khung.

Để sử dụng phương trình 13.29 để tính chuyển vị tại mặt cắt bất kỳ, nội lực tại mọi mặt cắt của kết cấu có thể xác định do: (i) lực thực và (ii) lực ảo đơn vị. Lực thứ hai là lực giả tưởng, tải trọng giả đưa ra chỉ đơn thuần để tính toán. Cụ thể, nếu chuyển vị cần tính toán là dịch chuyển thẳng thì lực giả tưởng là lực tập trung đặt vào điểm và hướng của dịch chuyển phải tìm. Nếu chuyển vị phải tìm là góc xoay, thì lực đơn vị là một ngẫu lực tác động vào cùng hướng và cùng vị trí của góc xoay. Nếu cần xác định dịch chuyển tương đối giữa hai điểm, thì cần hai lực đơn vị tác động ngược hướng tại các điểm đó dọc theo đường thẳng nối các điểm đó. Tương tự, nếu cần xác định góc xoay tương đối, thì cần hai ngẫu lực đơn vị tác động ngược hướng tại các điểm đó.

Nội lực N_{uj}, M_{uj}, V_{uj} và T_{uj} là lực trên lực ảo đơn vị. Nếu chuyển vị cần tính là dịch chuyển thẳng và đơn vị là N và m thì N_{uj}, M_{uj}, V_{uj} và T_{uj} có đơn vị lần lượt là N/N, Nm/N, N/N và Nm/N. Nếu lực ảo là ngẫu lực thì N_{uj}, M_{uj}, V_{uj} và T_{uj} có đơn vị lần lượt là N/Nm, Nm/Nm, N/Nm và Nm/Nm. Ta có thể kiểm tra phép tính bằng cách kiểm tra đơn vị của các phép tính.

Mỗi số hạng trong 13.29 thể hiển sự đóng góp của từng loại nội lực. Trong thực tế không phải lúc nào cũng có cả bốn loại nội lực, vậy một số số hạng sẽ không cần tính. Có thể bỏ qua các số hạng có đóng góp không đáng kể .

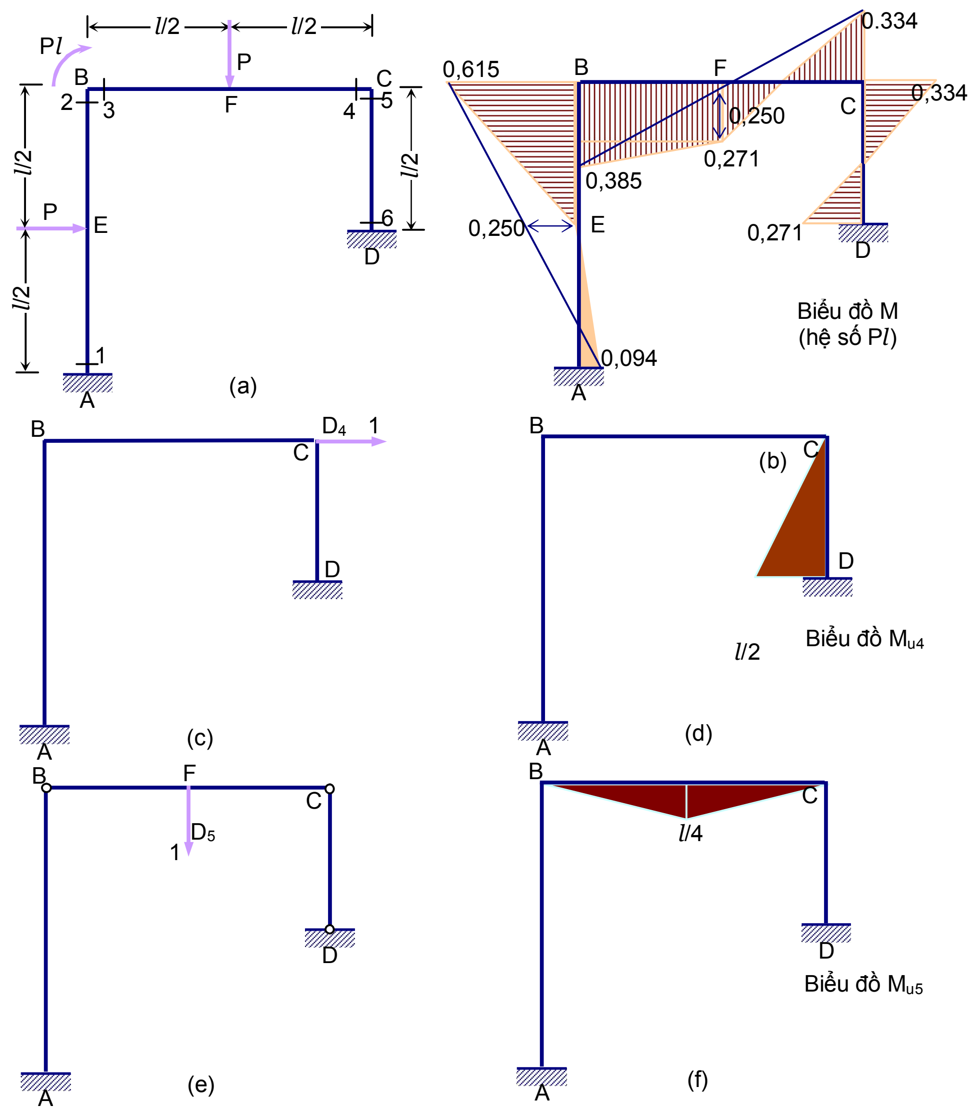
13.3.2. Chuyển vị của kết cấu siêu tĩnh

Như trong mục 13.2 đã trình bày nguyên lý công khả dĩ có thể áp dụng cho kết cấu bất kỳ, tĩnh định hay siêu tĩnh. Tuy nhiên trường hợp siêu tĩnh cần tính nội lực gây ra do tải trọng thực bằng phương pháp lực hoặc phương pháp chuyển vị.

Sau đó, ta cần tìm nội lực N_{uj}, M_{uj}, V_{uj} và T_{uj} do lực ảo đơn vị tác dụng tại j. Những lực này có thể xác định cho kết cấu đã giải phóng liên kết (bất kỳ) miễn thỏa mãn điều kiện cân bằng với lực ảo đơn vị. Ta có thể làm được điều này bằng cách giải phóng một số liên kết đảm bảo kết cấu ổn định. Ta có thể làm vậy vì nguyên lý công ảo liên hệ giữa chuyển vị ảo tương thích của kết cấu thực với hệ lực ảo cân bằng, hệ lực này không nhất thiết phải ứng với hệ lực thực.

Ví dụ 13.1. Xét kết cấu trên hình 13.4a tìm chuyển vị ngang D_4 tại điểm C. Chỉ xét biến dạng uốn. Độ cứng của các thanh không đổi bằng EI.

Biểu đồ mô men đã có từ ví dụ 3.2 và biểu diễn trên hình 13.4b.



Hình 13.4

Lực đơn vị tác động vào tọa độ 4 vào kết cấu tĩnh định có được bằng cách cắt khung chỉ để lại thanh CD, hình 13.4c. Biểu đồ mô men uốn M_{u4} biểu diễn trên hình 13.4d.

Sử dụng phương trình 13.29 và chỉ xét uốn ta có

$$D_4 = \int \frac{M_{u4} M}{EI} dl$$

Tích phân này chỉ cần lấy trên đoạn CD vì mô men uốn bằng 0 trên các đoạn còn lại. Sử dụng phụ lục 6 ta có

$$D_4 = \frac{1}{EI}\left[\frac{l}{2}\frac{(l/2)}{6}\left(2\times 0{,}271Pl - 0{,}334PL\right)\right] = 0{,}0087\frac{Pl^3}{EI}$$

Giả thiết ta cần tìm chuyển vị thẳng đứng tại F, ký hiệu là D_5. Ta đặt lực ảo đơn vị tác động vào khung có ba liên kết khớp, hình 13.4e. Biểu đồ mô men M_{u5} biểu diễn trên hình 13.4f. Tương tự như với D_4 ta có

$$D_4 = \int \frac{M_{u5} M}{EI} dl$$

Tích phân này chỉ cần lấy trên đoạn BCD vì mô men uốn bằng 0 trên các đoạn còn lại. Sử dụng phụ lục 6 ta có

$$D_5 = \frac{1}{EI}\left[\frac{l}{4}\frac{(l/2)}{6}\left(0{,}385Pl + 4\times 0{,}25PL - 0{,}334Pl\right)\right] = 0{,}0240\frac{Pl^3}{EI}$$

Có thể đưa ra các lực ảo khác để tính D_4 và D_5.

13.3.3. Đánh giá tích phân để tính chuyển vị bằng phương pháp công ảo

Phần trước ta thấy tích phân

$$\int \frac{M_{uj} M}{EI} dl$$

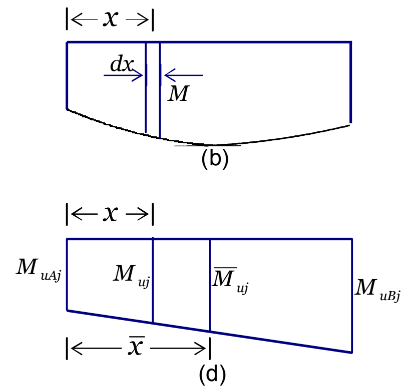
thường xuất hiện trong phương trình công ảo. Ta sẽ xem tính tích phân này như thế nào, sau đó các tích phân khác cùng có thể làm tươgn tự.

Nếu kết cấu có m phần tử, thì tích phân có thể thay bằng tổng

$$\int \frac{M_{uj} M}{EI} dl = \sum_{pt} \int M_{uj} \frac{M}{EI} dl \qquad (13.30)$$

sao cho bài toán đưa về tính tích phân cho một phần tử.

Ta xét phân tử thẳng AB có độ dài l, có tiết diện thay đổi chịu uốn (hình 13.5a). Hình 13.5b biểu diễn biểu đồ momet uốn do tải trọng bất kỳ. Nếu ta chia tung độ của biểu đồ này cho EI ta nhân được biểu đồ M/EI trên hình 13.5c.



Hình 13.5

Vì thanh AB thẳng, nên biểu đồ mô men uốn M_{uj} trên đoạn AB do lực ảo đơn vị tại tọa độ bất kỳ sẽ là đường thẳng (hình 13.5d). Ký hiệu tung độ của biểu đồ này tại A và B là M_{uAj} và M_{uBj}. Tung độ tại mặt cắt bất kỳ cách a một đoạn x là

$$M_{uj} = M_{uAj} + \left(M_{uBj} - M_{uAj}\right)\frac{x}{l}$$

Thế biểu thức của M_{uj} vào tích phân, ta có

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI}dl = M_{uAj}\int_0^l \frac{M}{EI}dx + \left(\frac{M_{uBj} - M_{uAj}}{l}\right)\int_0^l \frac{M}{EI}xdx \qquad (13.31)$$

Tích phân trong số hạng thứ nhất là diện tích của biểu đồ M/EI, ta ký hiệu

$$a_M = \int_0^l \frac{M}{EI}dx$$

Nếu $\bar{x}$ là khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ M/EI đến điểm A thì mô men bậc nhất của diện tích a_M đối với A sẽ là

$$a_M\bar{x} = \int_0^l \frac{M}{EI}xdx$$

Như vậy phương trình 13.31 sẽ có dạng

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI}dl = a_M\left[M_{uAj} + \left(M_{uBj} - M_{uAj}\right)\frac{\bar{x}}{l}\right]$$

Số hạng trong dấu ngoặc vuông chính là tung độ $\overline{M}_{uj}$ của biểu đồ M_{uj} tại mặt cắt đi qua trọng tâm của biểu đồ M/EI. Vậy

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI}dl = a_M\overline{M}_{uj} \tag{13.32}$$

Bằng cách phân tích tương tự ta có thể tính toán

$$\int \frac{V_{uj}V}{Ga_r}dl = a_V\overline{V}_{uj} \tag{13.33}$$

$$\int \frac{T_{uj}T}{GJ}dl = a_T\overline{T}_{uj} \tag{13.34}$$

$$\int \frac{N_{uj}N}{Ea}dl = a_N\overline{N}_{uj} \tag{13.35}$$

Các ký hiệu bên vế phải của các phương trình 13.32-13.35 là

a_M, a_V, a_T và a_N diện tích của các biểu đồ M/EI, V/Ga_r, T/GJ và N/Ea

$\overline{M}_{uj}$, $\overline{V}_{uj}$, $\overline{T}_{uj}$ và $\overline{N}_{uj}$ - giá trị của M_{uj}, V_{uj}, T_{uj} và N_{uj} tại trọng tâm của các diện tích a xét ở trên.

Diện tích và trọng tâm của một số hình thường gặp có thể xem trong phụ lục 5. Với thanh có độ cứng EI không đổi, giá trị của tích phân $\int M_{uj}Mdl$ cho một số hình thường gặp cho trong phụ lục 6.

Chú ý: giá trị của tích phân không phụ thuộc vào quy ước dấu của nội lực, đảm bảo rằng quy ước dầu cho lực ảo và lực thực như nhau.

13.4. Áp dụng phương pháp công ảo cho hệ dàn

13.4.1. Chuyển vị của dàn

Trong dàn phẳng hay dàn không gian từ m thanh liên kết khớp, chỉ chịu lực tại các nút, nội lực duy nhất là lực dọc trục, vây phương trình 13.29 có dạng

$$D_j = \sum_{i=1}^{m}\int_l \frac{N_{uj}N}{Ea}dl \tag{13.36}$$

Nói chung tiết diện không đổi trong từng thanh nên ta có

$$D_j = \sum_{i=1}^{m}\frac{N_{uij}N}{E_i a_i}l_i \tag{13.37}$$

ở đây m số phần tử, N_{uij} là lực dọc trục trong thanh thứ i do lực ảo tại điểm j, và $N_i l_i/(E_i a_i)$ là thay đổi độ dài của thanh i do lực thực gây ra, giả thiết vật liệu tuân thủ định luật Hooke.

Phương trình 13.37 có thể viết dưới dạng

$$D_j = \sum_{i=1}^{m} N_{uij} \Delta_i \qquad (13.38)$$

trong đó Δ_i là thay đổi độ dài thực của thanh thứ i. Biểu thức này dùng khi thay đổi độ dài là do các nguyên nhân khác ngoài ngaọi lực ví dụ như thay đổi nhiệt độ. Sự tăng hay giam nhiệt độ trong thanh thứ i đi t độ sẽ gây ra sự thay độ độ dài là

$$\Delta_j = \alpha t l_i \qquad (13.39)$$

trong đó l_i độ dài của thanh thứ i, và α là hệ số giãn nở nhiệt.

Phương trình 13.38 đúng cho cả kết cấu tuyến tính và phi tuyến.

Ví dụ. 13.2. Dàn phẳng như trên hình 13.6a. Chịu tác động của hai lực bằng nhau P tại E và D. Tiết diện của các thanh 1, 2, 3, 4 và 5 là a, còn các thanh 6 và 7 là 1.25a. Xác định chuyển vị ngang D_1 của điểm C, và dịch chuyển tương đối D_2, của hai điểm B và E.

Nội lực được xác định và cho trên hình 13.6b.

Nội lực do lực ảo đơn vị gây ra tại tọa độ D_1 và D_2 được xác định và cho trên hình 13.6c và d. Các giá trị nhân được có thể kiểm tra từ điều kiện cân bằng tại nút.

Quy ước dấu: thanh chịu kéo có lực dọc trục dương.

Tính D_1 và D_2 dùng phương trình 13.37. Trong bảng 13.1. dưới đây là các tính toán cho dưới dạng bảng.

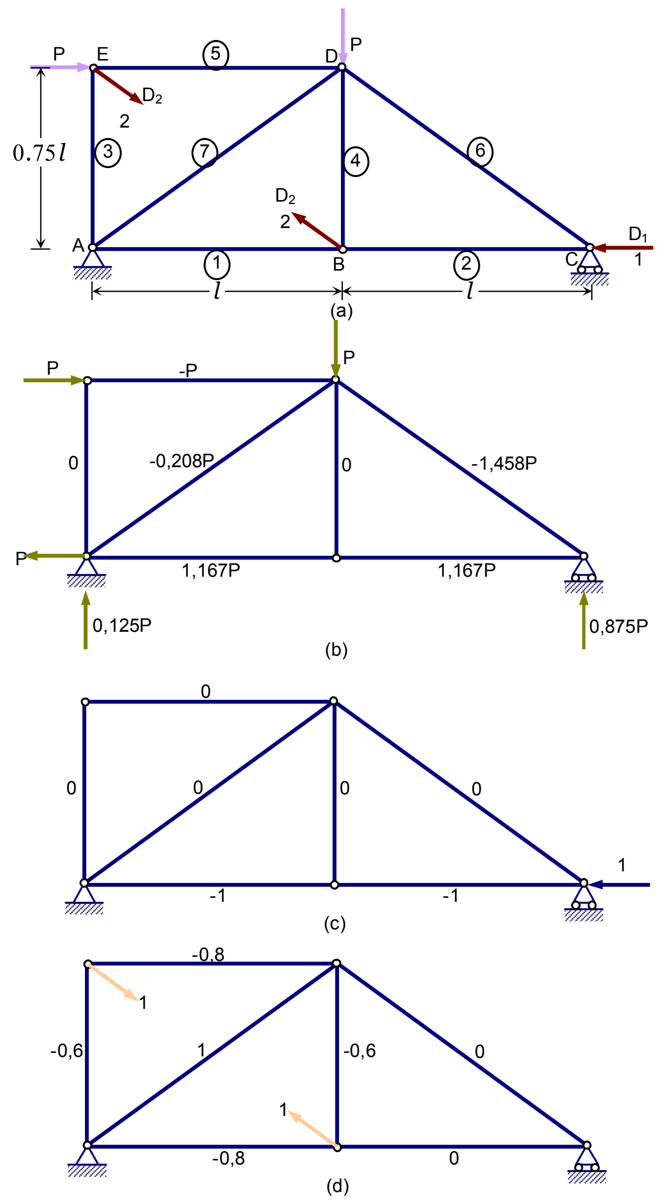
Bảng 13.1. Tính D_1 và D_2 (Ví dụ 13.2.)

Phần tử	Đặc trưng của thanh			Tải thực	Tính D_1		Tính D_2	
	Độ dài	Tiết diện	$\frac{l}{Ea}$	N	N_u	$\frac{N_u Nl}{Ea}$	N_u	$\frac{N_u Nl}{Ea}$
1	1	1	1	1,167	-1	-1,167	-0,8	-0,933
2	1	1	1	1,167	-1	-1,167	0	0
3	0,75	1	0,75	0	0	0	-0,6	0
4	0,75	1	0,75	0	0	0	-0,6	0
5	1	1	1	-1	0	0	-0,8	0,800
6	1,25	1,25	1	-1,458	0	0	0	0
7	1,25	1,25	1	-0,208	0	0	1	-0,208
Hệ số	l	a	$\frac{l}{Ea}$	P	-	$\frac{Pl}{Ea}$	-	$\frac{Pl}{Ea}$
						-2,334		-0,341

Từ bảng 13.1 ta nhân được chuyển vị D_1 và D_2 là tổng của cột $\frac{N_u N l}{Ea}$ tương ứng. Vậy

$$D_1 = -2{,}334\frac{Pl}{Ea} \text{ và } D_2 = -0{,}341\frac{Pl}{Ea}.$$

Dầu âm của D_1 chỉ ra rằng chuyển vị ngược với hướng của lực ảo trong hình 13.6c. Có nghia điểm C dịch sang bên phải. Tương tự dich chuyển tương đổi của B và E ngược với hướng của lực ảo như vậy chúng tách ra khỏi nhau.



Hình 13.6

Ví dụ 13.3. Cũng với dàn phẳng trong ví dụ 13.2, tìm chuyển vị D_2, khi phân tử thứ 5 và 6 tăng 30^0. (Trường hợp này không có lực P tác dụng). Giả thiết độ giãn nở nhiệt α=0,6$\times$10^{-5}/độ.

Lực ảo đơn vị tác động như trên hình 13.6d.

Thay đổi độ dài thực chỉ xuất hiện ở hai phần tử số 5 và 6, sử dụng 13.39

$$\Delta_5 = 0,6\times10^{-5}\times30\times l = 18\times10^{-5} l$$

$$\Delta_6 = 0,6\times10^{-5}\times30\times1,25l = 22,5\times10^{-5} l$$

Từ phương trình (13.38) ta có

$$D_2 = \sum_{i=5,6} N_{ui2}\Delta_i = -0,8(18\times10^{-5}l) + 0\times(22,5\times10^{-5}l) = -14,4\times10^{5}l$$

13.4.2. Chuyển vị của dàn dùng đại số ma trận

Co dàn có m phần tử, phương trình (13.37) cho ta chuyển vị tại các nút theo các hướng xác định bằng các tọa độ j. Ta có thể biểu diễn dưới dạng ma trân

$$D_j = \{N_u\}^T_{j\ m\times1}[f_M]_{m\times m}\{N\}_{m\times1} \tag{13.40}$$

ở đây $\{N_u\}^T_j$ la ma trận chuyển đổi của ma trận $\{N_u\}_j$ là các nội lực do lực ảo đ[n vị tại tọa độ j gây ra. Các thành phân của $\{N\}$ là nội lực do lực thực gây ra. Cuối cùng, ma trận [f_M]

$$[f_M] = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{E_1a_1} & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{E_2a_2} & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & \frac{l_m}{E_ma_m} \end{bmatrix} \tag{13.41}$$

là ma trận đường chéo, với các phân tử trên đường chéo là độ mềm theo biến dạng dọc trục của từng phần tử, đây chính là thay đổi độ dài do lực đơn vị gây ra. Ma trận nay là ma trận độ mềm của kết cấu chưa tập hợp.

Sử dụng ma trận có ưu điểm khi ta sử dụng máy tính để tính toán chuyển vị tại một số nút. Giả sử chuyển vị cần tìm tại n tọa độ. Lực ảo đơn vị tác động riêng biệt vào từng nút và ta có được một tập các lực. ta bố trí các lực này dưới dạng ma trận

$$[N_u]_{m\times n} = \begin{bmatrix} N_{u11} & N_{u12} & \Lambda & N_{u1n} \\ N_{u21} & N_{u22} & \Lambda & N_{u2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ N_{un1} & N_{un2} & \Lambda & N_{unn} \end{bmatrix} \quad (13.42)$$

ở đây phần tử trong cột thứ j là lực trong phần tử do lực ảo tác động vào tọa độ thứ j. Chỉ số thứ nhất của N_u xác định phần tử dàn, chỉ số thứ hai xác định tọa độ j, tại đó lực ảo đơn vị tác động.

Dùng các biểu thức 13.42 và 13.40 ta có thể mở rộng cho trường hợp xác định chuyển vị tại n tọa độ như sau

$$\{D\}_{n\times 1} = [N_u]^T_{m\times n}[f_M]_{m\times m}\{N\}_{m\times 1} \quad (13.43)$$

Khi chuyển vị cần xác định cho p trương hợp tải trọng ta có

$$[D]_{n\times p} = [N_u]^T_{m\times n}[f_M]_{m\times m}[N]_{m\times p} \quad (13.44)$$

Các ký hiệu được dùng là

D - chuyển vị tại các tọa độ

N_u - lực tại các phần tử do lực ảo đơn vị gây ra tại các tọa độ. Phần tử của từng cột trong ma trận $[N_u]$ là lực do lực ảo đơn vị tác động tại tọa độ tương ứng.

f_M = l/(Ea) = độ mềm của phần tử

N - lực tại phần tử do tải trọng thực; phân tử của từng cột trong ma trận [N] là lực ứng với từng trừng hợp tải trọng

n - số tọa độ mà tại đó ta cần tính chuyển vị

m - số phần tử

p - số trường hợp tải.

Nếu chuyển vị cần tìm là do sự thay đổi độ dài của các thanh do thay đổi nhiệt độ, hay do nguyên nhân biến dạng khác. Phương trình 13.38 có thể biểu diễn dưới dạng ma trận tương đương như phương trình 13.44

$$[D]_{n\times p} = [N_u]^T_{m\times n}[\Delta]_{m\times p} \quad (13.45)$$

Phần tử của từng cốt của [Δ] là độ dãn dài của từng thanh ứng với từng trường hợp.

Ví dụ 13.4. Giải ví dụ 13.2 dùng ma trận. Chuyển vị cần tính tại tọa độ 1 và 2 biểu diễn trên hình 13.6a.

Trong bài toán này ta có n=2, m=7 và p=1. Lực tạo thanh ma trận [N] và [N_u] biểu diễn trên hình 13.6b, c và d. Vậy

$$[N_u]_{7\times2}=\begin{bmatrix}-1 & -0{,}8\\ -1 & 0\\ 0 & -0{,}6\\ 0 & -0{,}6\\ 0 & -0{,}8\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad [N_u]_{7\times1}=\begin{bmatrix}1{,}167\\ 1{,}167\\ 0\\ 0\\ -1\\ -1{,}458\\ -0{,}208\end{bmatrix}\quad [f_M]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0{,}75&0&0&0&0\\0&0&0&0{,}75&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Thế vào phương trình 13.43

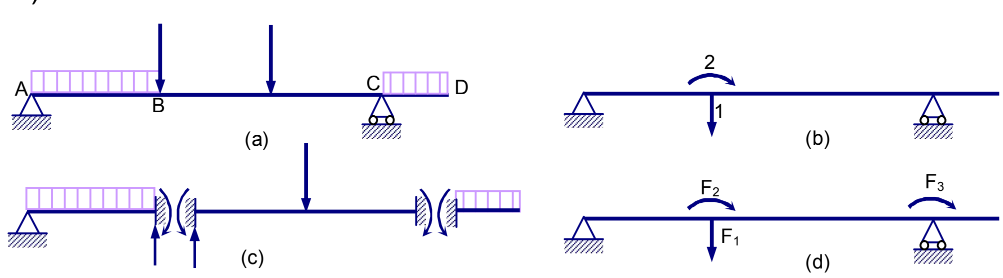
$$[D]_{2\times1}=[N_u]^T_{7\times2}[f_M]_{7\times7}[N]_{7\times1}=\frac{Pl}{Ea}\begin{bmatrix}-2{,}334\\ -0{,}341\end{bmatrix}$$

13.5. Áp dụng phương pháp công ảo cho hệ khung

13.4.1. Tải trọng nút tương đương

Như ta đã thấy khi phân tích kết cấu bằng phương pháp lực chuyển vị được chọn tại một số tọa độ, thường ta chọn tại các nút và ta cũng nhận thấy sẽ rất tiện nếu ta sử dụng ma trận để tính toán. Như vậy đòi hỏi tải trọng phải đặt tại nút. Tuy nhiên tải trọng tác động giữa các nút có thể đưa về tải trọng nút tương đương. Các tải tương đương được chọn sao cho chuyển vị tại nút sẽ bằng với chuyển vị do tải trọng thật gây ra. Chyển vị tại các điểm không phải là nút không nhất thiết phải bằng với chuyển vị do tải thực gây ra.

Ta xét dầm trên hình 13.7a, cần tìm chuyển vị tại tọa độ 1 và 2 tại B (hình 13.7b).



Hình 13.7

Ta coi điểm B là một nút nối phần tử AB với BC. Trên hình 13.7c chuyển vị tại nút B và C đã bị hạn chế và ta xác định lực đầu phần tử do tải trọng thực gây ra. Ta có thể dùng phụ lục 2 để tính. Lực đầu phần tử tại các nút công lại và thành lực nút tương đương đặt vào kết cấu (hình 13.7d). Những lực này tương đương về mặt tĩnh học với tải trọng thực và gây ra chuyển vị tại tọa độ 1 và 2 giống như tải trọng thực. Góc xoay tại C cũng sẽ giống như góc xoay do tải trọng thực gây ra. Nhưng điều này không đúng cho chuyển vị tại các nút A và D.

Thật vậy, ta xác định chuyển vị tại 1, 2 và góc xoay tại C bằng cách tổ hợp chuyển vị do các trường hợp tải trọng trên hình 13.7c và 13.7d gây ra. Nhưng lực trong trường hợp hình 13.7c không gây ra chuyển vị 1, 2 và góc xoay tại C. Khi cởi bỏ các lực hạn chế bằng cách đặt vào các lực như trên hình 13.7d sẽ gây ra các chuyển vị tại tọa độ 1 và 2 và góc xoay tại C bằng với chuyển vị do tải trọng thực gây ra.

Trong trường hợp trên ta đưa vào các hạn chế tại những tạo độ ta cần xác định chuyển vị, Tuy nhiên có thể đưa thêm các hạn chế tại các ví trí khác để thuận tiện hơn cho việc tính các lực đầu phần tử.

Tất nhiên, thay thế bằng lực nút tương đương sẽ cũng gây ra phản lực bằng với phản lực trong trường hợp tải thực. Nội lực tại các đầu nút của phân tử do lực tương đương gây ra được cộng với lực đầu phần tử do tải trọng thực cho ta nội lực trong trường hợp tải thực.

Ưu điểm của việc dùng tải trọng nút tương đương là biểu đồ nội lực tương ứng thành đường thẳng. Do vây, việc tính tích phân trong phương trình 13.43 dễ dàng hơn nhiều.

13.4.2. Chuyển vị của dầm và khung

Nội lực chính trong dầm và khung là mô men uốn và lực cắt. Lực dọc trục và mô men xoắn hoặc không tồn tại hoặc đóng góp rất nhỏ so với chuyển vị ngang và góc xoay. Vì vậy, trong phương trình 13.43 ta có thể bỏ qua các thành phần kéo nén và xoắn khi tính chuyển vị ngang và góc xoay. Như vậy chuyển vị của dầm chịu lực cắt và mô men uốn có dạng

$$D_j = \int \frac{M_{uj} M}{EI} dl + \int \frac{V_{uj} V}{G a_r} dl \tag{13.46}$$

Hơn nữa, các tiết diện của dầm dùng trong thực tế được thiết kế sao cho biến dạng do trượt không đáng kể và có thể bỏ qua. Nên chuyển vị sẽ là

$$D_j = \int \frac{M_{uj} M}{EI} dl \qquad (13.47)$$

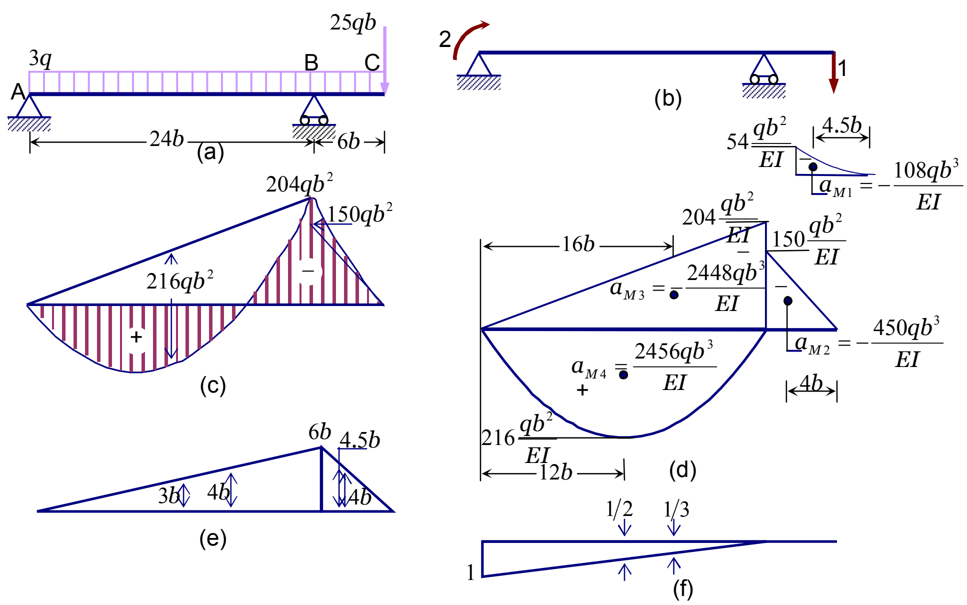
Từ phương trình 13.6 ta có thay đổi độ võng của trục biến dạng của dầm trên một đoạn dl là $d\theta = -M / EIdl$. Thế vào (13.47) ta được

$$D_j = \int M_{uj} d\theta \qquad (13.48)$$

Độ võng âm nếu nó có cùng hướng với sự thay đổi góc do mô men dương gây ra. Quy ước dấu của độ vòng xem trên hình 13.4b.

Phương trình 13.48 có thể dùng để tìm chuyển vị do các nguyên nhân không phải là ngoại lực gây ra, ví dụ như chêch lệch nhiệt độ của mặt trên và mặt dưới của dầm.

Ví dụ 13.5. Hình 13.8a biểu diễn dầm ABC với một đầu treo tự do. Tìm chuyển vị dọc D_1 tại C và góc xoay D_2 tại A. Dầm có độ cứng uốn không đổi EI. Chỉ xét biến dạng do uốn.



Hình 13.8

Biểu đồ mô men cho trên hình 13.8c với tung độ vẽ lên mặt chịu kéo. Hình 13.8e và f cho biểu đồ mô men do các lực đ[n vị tại toạn độ 1 và 2. Vì EI=const nên ta có thể xác định trọng tâm của biểu đồ M thay vì M\EI, sau đó lấy giá trị tìm được chia cho EI. Ta chia biểu đồ M thành các phần để dễ tìm trọng tâm như trên hình 13.8d. Phần diện tích của biểu đồ dương thì mang dấu dương, và ta chỉ cần tọa độ trọng tâm theo chiều dài của dầm.

Bước tiếp theo xác định tung độ của các biểu đồ mô men M_{uj} ứng với trọng tâm của từng phần diện tích (xem hình 13.8e và f).

Chuyển vị D_1 và D_2 tính theo 13.32

$$D_j = \sum a_M \overline{M}_{uj}$$

ở đây $\overline{M}$ là tung độ tại trong tâm của biểu đồ mô men. Vậy

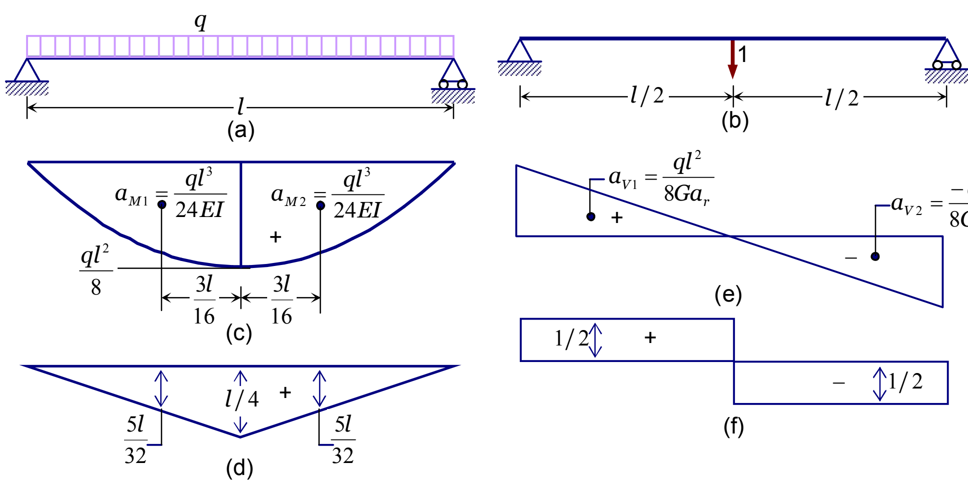
$$D_1 = \frac{qb^4}{EI}(108\times 4{,}5 + 450\times 4 + 2448\times 4 - 3456\times 3) = \frac{1710}{EI}qb^4$$

và

$$D_2 = \frac{qb^3}{EI}\left(2448\times\frac{1}{3} - 3456\times\frac{1}{2}\right) = \frac{912}{EI}qb^3$$

Kết quả tính có dấu dương có nghĩa chuyển vị D_1 và D_2 theo hướng của các tọa độ trên hình 13.8b.

Ví dụ 13.6. Tìm tỷ lệ đóng gpó của trượt so với đóng góp của mô men uốn lên tổng chuyển vị tại điểm giữa của dầm thep chữ I chịu lực phân bố đều gối tựa đơn giản (Hình 13.9a). Các dữ liệu khác: mô men quán tính chống uốn của dầm là I, diện tích a_r=a_w diện tích của cách tiết diện chữ I, G/E=0,4; độ dài nhịp l; cường độ phân bố lực là q/đơn vị độ dài.



Hình 13.9

Hình 13.9c và d biểu diễn biểu đồ mô men uốn và lực cắt do tải trọng thực gây nên. Cho lực ảo đơn vị tác động vào tọa độ 1 (hình 13.9b) nơi cần tìm chuyển vị.

Các biểu đồ của M_{u1} và V_{u1} cho trên hình 13.9d và f. Ta chia biểu đồ M và V là hai phần ứng với hai phần của biểu đồ M_{u1} và V_{u1}. Xác định tung độ $\overline{M}_{u1}$ và $\overline{V}_{u1}$ ứng với trọng tâm của từng phần biểu đồ. Tổng chuyển vị tại điểm giữa là

$$D_1 = \int \frac{M_{u1}M}{EI}dl + \int \frac{V_{u1}V}{Ga_r}dl \qquad (13.49)$$

trong đó độ võng do uốn là

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI}dl = \sum a_M \overline{M}_{u1} = 2\frac{ql^3}{24EI}\frac{5l}{32} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

còn độ võng do lực cắt

$$\int \frac{V_{uj}V}{Ga_r}dl = \sum a_V \overline{V}_{u1} = 2\frac{ql^2}{8Ga_r}\frac{1}{2} = \frac{ql^2}{8Ga_r}.$$

Suy ra

$$\frac{D \text{ do } V}{D \text{ do } M} = \frac{ql^2}{8Ga_r}\frac{384}{5}\frac{EI}{ql^4} = \frac{48}{5}\frac{E}{G}\frac{I}{l^2a_r}$$

Công thức này đúng cho dầm đơn giản tiết diện bất kỳ chịu lực phân bố đều. Trong trường hợp này ta có G=0,4E nên

$$\frac{D \text{ do } V}{D \text{ do } M} = \frac{48}{5}\frac{E}{0{,}4E}\frac{I}{l^2a_r} = 24\frac{I}{l^2a_r} = c\left(\frac{h}{l}\right)^2$$

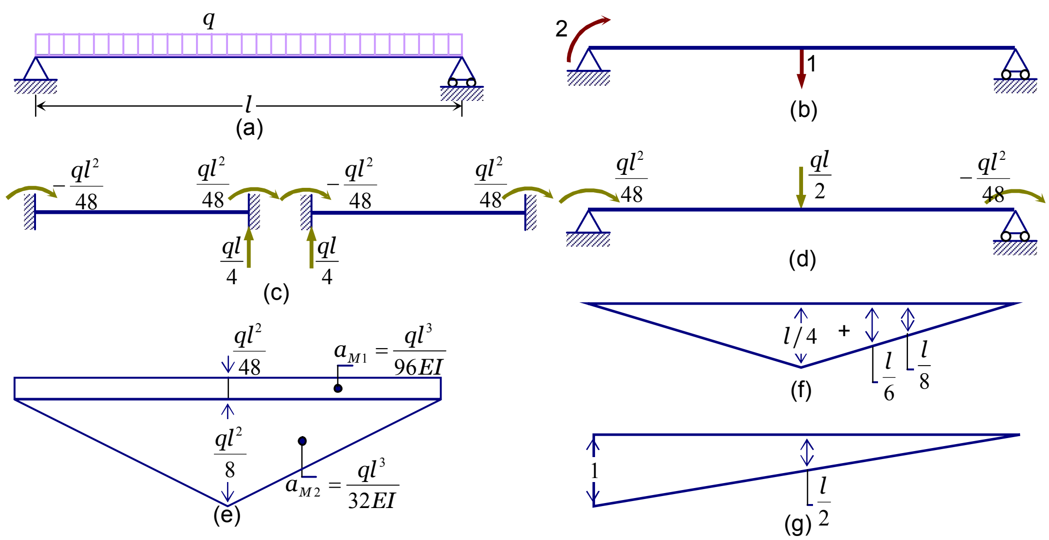
ở đây h là chiều cao của tiết diện chữ I và

$$c = 24\frac{I}{h^2a_w}$$

Ta thấy giá trị c phụ thuộc vào tỷ lệ của tiết diện, với thép cán nói chung giá trị c thay đổi từ 7 đến 20. Trong các tài liệu tra cứu ta có thể tìm thấy giá tri c cho các tiết diện của các loại tiết diện thép cán thường gặp.

Với các thanh chữ I trên thực tế tỷ lệ h/l nằm trong khoảng 1/10 và 1/20. Dầm đơn giản chịu tải phân bố đều có tiết diện hình chữa nhật với G=0,4E và h/l =1/5, 1/10 và 1/15, thì độ võng do lực cắt chiếm 9,6; 1,4 và 1,07% của độ võng do uốn. Nếu là tầm cao như vậy thì tỷ lệ này là 15 đến 25%.

Ví dụ 13.7. Xét dầm đơn giản AB chịu tải phân bố đều trên hình 13.10a. Xác định độ võng ở giữa dầm và góc xoay tại các gối. Bỏ qua biến dạng trượt.



Hình 13.10

Ta có hệ tọa độ cho các chuyển vị cần tìm như trên hình 13.10b. Hình 13.10c biểu diễn lạc đầu phần tử do tải thực gây ra trên kết cấu đã bị hạn chế. Ứng lực này là lực nút tương đương đặt vào kết cấu như trên hình 13.10d. Biểu đồ mô men uốn đối với hệ lực này cho trên hình 13.10e, biểu đồ mô men do lực đơn vị tác dụng vào các tọa độ 1 và 2 vẽ trên hình 13.10f và g.

Từ phương trình 13.46 tính chuyển vị D_1 và D_2 sử dụng phụ lục 6. Ta có

$$D_1 = \int \frac{M_{u1}M}{EI} dl = 2\left(\frac{ql^3}{96EI} \times \frac{l}{8} + \frac{ql^3}{32EI} \times \frac{l}{6}\right) = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

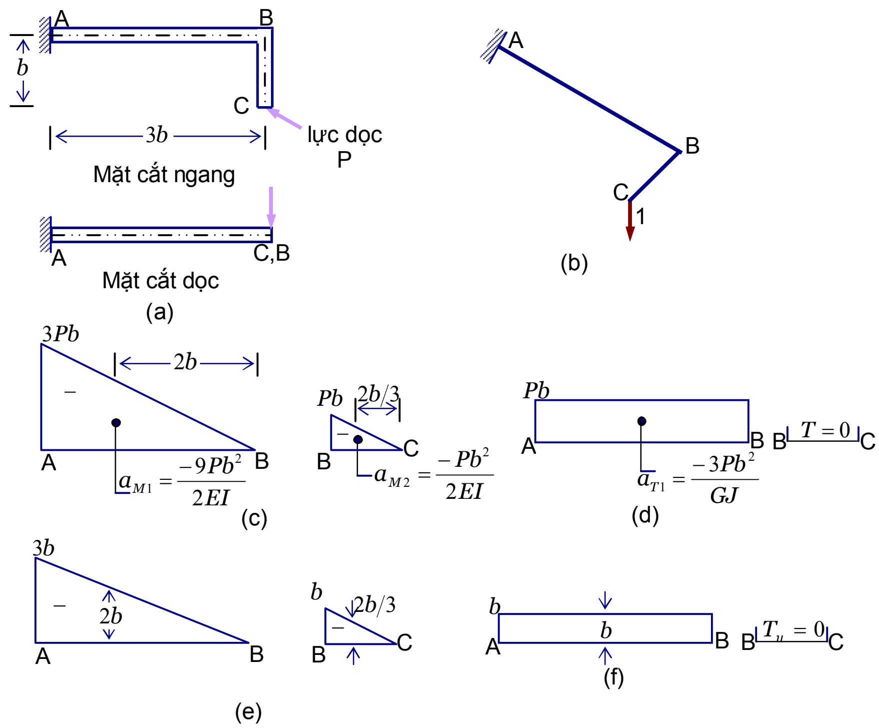
và

$$D_2 = \int \frac{M_{u2}M}{EI} dl = 2\left(\frac{ql^3}{96EI} + \frac{ql^3}{32EI}\right)\frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24EI}$$

Các giá trị này giống như giá trị đã cho trong phụ lục 1.

Ví dụ 13.8 Ống ABC như trên hình 13.11a được ngàm một đầu với AB và BC nằm trên mặt phẳng ngang. Một lực thẳng đứng P tác động vào đầu C. Tìm chuyển vị tại C do uốn và xoắn. Ống có tiết diện không đổi. Cho G=0,4E và J=2I.

Biểu đồ M và T ứng với tải trọng thực biểu diễn trên hình 13.11c và d với diện tích và trọng tâm cho trên hình vẽ. Lực ảo đặt vào tọa độ 1, là tọa độ thẳng đứng tại C, điểm cần tìm chuyển vị. Biểu đồ của M_{u1} và T_{u1} do lực ảo gây nên vẽ trên hình 13.11e và f.



Hình 13.11

Từ phương trình 13.29, chỉ có thành phần uốn và xoắn

$$D_1 = \int \frac{M_{u1}M}{EI}dl + \int \frac{T_{u1}T}{GJ}dl$$

Tính các tích phân theo từng đạo Ab và BC dùng phương trình 13.32 và 13.34 sau đó lấy tổng, ta nhận được

$$D_1 = \sum a_M \overline{M}_{u1} + \sum a_T \overline{T}_{u1}$$

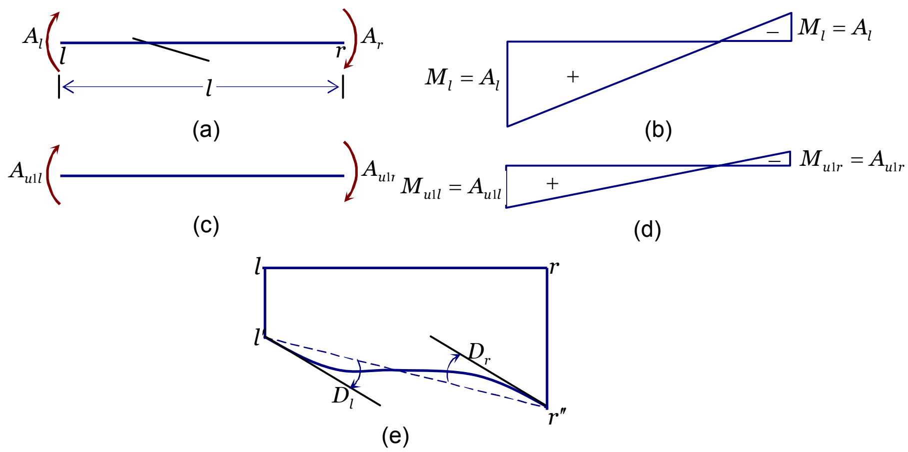
$$= \left(-\frac{4.5Pb^2}{EI}\right)(-2b) + \left(-\frac{0.5Pb^2}{EI}\right)\left(-\frac{2b}{3}\right) + \left(-\frac{3Pb^2}{GJ}\right)(-b)$$

$$= \frac{28}{3}\frac{Pb^3}{EI} + \frac{3Pb^3}{GJ} = \frac{Pb^3}{EI}\left(\frac{28}{3} + \frac{3}{0.4\times 2}\right) = 13{,}08333\frac{Pb^3}{EI}$$

13.4.3. Chuyển vị của dầm và khung dùng đại số ma trận

Ở mục 13.4.2 ta thấy khi tải tác động quy về lực tương đương tại nút, chuyển vị tại các nút sẽ giông như khi ta đặt tải thực. Nếu kết cấu chỉ gồm các phần tử thẳng thì lực tương đương sẽ gây ra mô men biến đổi tuyến tính giữa các nút và lực cắt và lực kéo nén là hằng số giữa các nút.

Hình 13.12a biểu diễn phân tử của kết cấu phẳng gồm m phần tử. Ký hiệu A_l và A_r là mô men tại đầu trái và đầu phải của phần tử do tải trọng bất kỳ tác động tại các nút. Ta giả thiết mô men dương nếu quay theo chiều kim đồng hồ. Biểu đồ mô men như trên hình 13.12b.



Hình 13.12

Mô men A_{ulj} và A_{urj} do lực ảo tác động vào tọa độ j chỉ ra trên hình 13.12c, và biểu đồ mô men tương ứng trên hình 13.12d. Nếu chỉ xét biến dạng do uốn, thì từ 13.47 ta xác định chuyển vị cho tất cả các phần tử của kết cấu. Dùng 13.32 để đánh giá tích phân trong 13.47 cho các phần tử trên hình 13.12 hay dùng phụ lục 6 ta có thể chỉ ra phần đóng góp của uốn trong chuyển vị tại nút j

$$\Delta D_j = \int \frac{M_{ul} M}{EI} dl = \frac{l}{6EI}\left(2A_l A_{ulj} - A_l A_{urj} - A_r A_{ulj} + 2A_r A_{urj}\right)$$

Dưới dạng ma trận

$$\Delta D_j = \{A_u\}_j^T [f_M]\{A\} \tag{13.51}$$

ở đây

$$\{A_u\}_j = \begin{Bmatrix} A_{ulj} \\ A_{urj} \end{Bmatrix} \tag{13.52}$$

$$\{A\}_j = \begin{Bmatrix} A_l \\ A_r \end{Bmatrix} \tag{13.53}$$

$$[f_M] = \frac{l}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{13.54}$$

Các số hạng của ma trận [f_M] là các góc xoay tại đầu dầm D_l và D_r so với trục thanh (đường gạch gạch trên hình 13.12e) do các ngẫu lực đơn vị tác động vào một trong các đầu dầm đơn giản (xem Phụ lục 1). Ma trận [f_M] là ma trận mềm uốn của phần tử.

Ta có thể nhận được phương trình 13.65 bằng phương pháp công ảo. Trong mục 13.2 ta thấy chuyển vị D_j về mặt giá trị là công của nội lực do lực ảo đơn vị tại nút j khi dịch chuyển theo chuyển vị do tại trọng thực gây ra. Cấu hình sau biến dạng trên hình 13.12e có thể tạo ra bằng cách dịch chuyển phần tử như một vật rắn tuyệt đối đến vị trí đường gạch gạch l'r', sau đó tác động hai mô men uốn M_l và M_r tại hai đầu của thanh l'r' gối tựa đơn giản. Nhân hai ma trận 13.53 và 13.54 ta được góc xoay tại hai đầu D_1 và D_2 so với thanh chéo.

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = [f_M]\{A\} \tag{13.55}$$

Tích $\{A_u\}_j^T\{D\}$ cho ta công của hai mô men A_{ulj} và A_{urj} khi di chuyển dọc theo D_1 và D_2. Vậy

$$\Delta D_j = \{A_u\}_j^T\{D\} \tag{13.56}$$

Thế {D} từ 13.55 ta nhận được 13.51.

Chuyển vị tại j có thể xác định bằng cách lấy tổng trên tất cả các phần tử

$$D_j = \sum_{i=1}^{m}\{A_u\}_{ij}^T[f_M]_i\{A\}_i \tag{13.57}$$

Phương trình này có thể chuyển về dạng

$$D_j = \{A_u\}_{j\,2m\times1}^T[f_M]_{2m\times2m}\{A\}_{2m\times1} \tag{13.58}$$

trong đó

$$\{A_u\}_j = \begin{Bmatrix} \{A_u\}_{1j} \\ \hline \{A_u\}_{2j} \\ \hline \Lambda \\ \hline \{A_u\}_{mj} \end{Bmatrix} \tag{13.59}$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} \{A\}_1 \\ \hline \{A\}_2 \\ \hline \Lambda \\ \hline \{A\}_m \end{Bmatrix} \tag{13.60}$$

$$[f_M] = \begin{bmatrix} [f_M]_1 & & & \\ & [f_M]_2 & & \\ & & \Lambda & \\ & & & [f_M]_m \end{bmatrix} \tag{13.61}$$

Ma trận $[f_M]$ chứa các ma trận độ mềm của từng phần tử và được gọi là ma trận độ mềm của kết cấu không ghép nối.

Phương trình 13.57 có lợi thế hơn phương trình 13.58 khi sử dụng máy tính vì các ma trận chiếm ít bộ nhớ hơn (4xm số hạng so với 2mx2m số hạng).

Nếu ta cần tính chuyển vị tại n tọa độ thì lực ảo đơn vị được đặt vào từng tọa độ riêng biệt và nhận được một tập hợp các mô men đầu phần tử. Các mô men này thiết lập thành ma trận

$$[A_u]_{2m\times 2m} = \begin{bmatrix} \{A_u\}_{11} & \{A_u\}_{12} & & \{A_u\}_{1n} \\ \{A_u\}_{21} & \{A_u\}_{22} & & \{A_u\}_{2n} \\ & & \Lambda & \\ \{A_u\}_{m1} & \{A_u\}_{m2} & & \{A_u\}_{mn} \end{bmatrix} \tag{13.62}$$

ở đây chỉ số thứ nhất chỉ số hiệu phần tử, chỉ số thứ hai chỉ số hiệu của tọa độ đặt lực ảo.

Nếu ta cần tính n chuyển vị do p trường hợp tải gây ra thì các mô men đầu phần tử được xác định cho từng phần tử với từng trường hợp tải. Các mô men này tạo thành ma trận

$$[A]_{2m\times p} = \begin{bmatrix} \{A\}_{11} & \{A\}_{12} & & \{A\}_{1p} \\ \{A\}_{21} & \{A\}_{22} & & \{A\}_{2p} \\ & & \Lambda & \\ \{A\}_{m1} & \{A\}_{m2} & & \{A\}_{mp} \end{bmatrix} \tag{13.63}$$

chỉ số thứ nhất ký hiệu phần tử, chỉ số thứ hai ký hiệu trường hợp tải.

Ta viết dưới dạng ma trận phương trình tương tự như phương trình 13.44

$$[D]_{n\times p} = [A_u]^T_{2m\times n}[f_M]_{2m\times 2m}[A]_{2m\times p} \tag{13.64}$$

Các ký hiệu được dùng là

D – phần đóng góp do biến dạng uốn vào chuyển vị tại một tọa độ

$\{A_u\}$ – ma trận con kích cỡ 2x1, số hạng của nó là hai mô men tại đầu phần tử do lực ảo đơn vị đặt tại một tọa độ gây ra.

$[f_M]_i$= ma trận độ mềm uốn của phần tử thứ i (phương trình 13.61) $= \frac{l}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

{A} – ma trận con kích cỡ 2x1, số hạng của nó là hai mô men tại đầu phần tử do một trường hợp tải thực gây ra

Với giả thiết các phần tử thẳng và tải trọng chỉ đặt tại nút thì lực dọc trục, lực cắt và mô men xoắn sẽ không đổi dọc theo phần tử. Nếu xem xét sự đóng góp của các chuyển vị này ta có thể đưa ra một phương trình tổng quát giống như phương trình 13.58 cho trường hợp chuyển vị của dàn khi chịu lực dọc trục. Vậy

$$[D]_{n\times p} = [A_u]^T_{m\times n}[f_M]_{m\times m}[A]_{m\times p} \qquad (13.65)$$

Các ký hiệu được dùng là

D – phần đóng góp của lực dọc trục, lực cắt và momnet xoắn vào chuyển vị tại một tọa độ

A_u – lực dọc trục, lực cắt hay mô men xoắn của phần tử do lực ảo đơn vị đặt tại một tọa độ gây ra, số hạng tại mỗi cột của ma trận $[A_u]$ là lực do tải ảo đơn vị tại một tọa độ

f_M = độ mềm của phần,

với lực dọc trục $f_M = \frac{l}{EI}$, lực cắt $f_V = \frac{l}{Ga_r}$, mô men xoắn $f_T = \frac{l}{GJ}$

A – lực dọc trục, lực cắt hay mô men xoắn của phần tử do tải trọng thực gây ra, số hạng tại mỗi cột của ma trận [A] ứng với một trường hợp tải ảo

n - số tọa độ mà tại đó ta cần tính chuyển vị

m - số phần tử

p - số trường hợp tải.

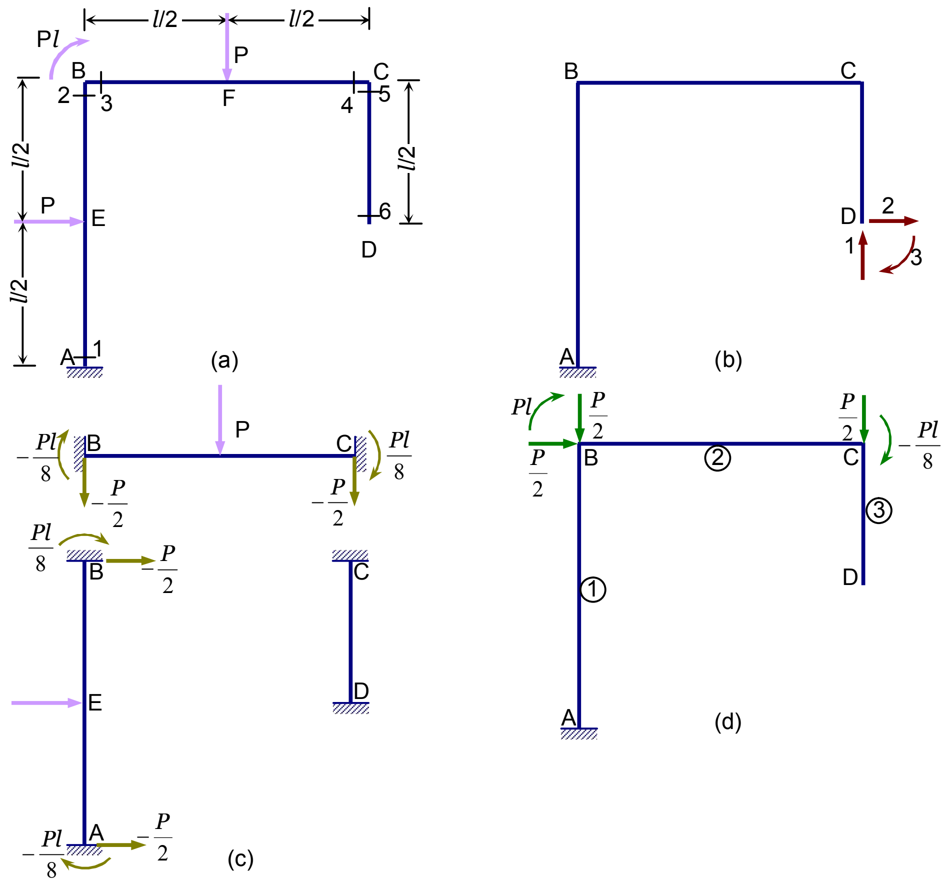
So sánh các phương trình 13.64 và 13.65, ta thấy phần đóng góp của biến dạng uốn, dọc trục, trượt và xoắn có thể biểu diễn qua các phương trình tương tự nhau. Vậy tổng chuyển vị có thể nhận được bằng phép tổng

$$[D] = \sum_{s=1}^{4}[A_u]^T_s[f_M]_s[A]_s \qquad (13.66)$$

ở đây s đại diện cho bốn loại biến dạng. Kích cỡ của các ma trận trong phương trình này sẽ giống như trong 13.64 đối với biến dạng uốn và như trong 13.65 cho các trường hợp khác. Các ký hiệu A_s và A là đáp ứng hai nội lực suy rộng, là lực hay ngẫu lực.

Ví dụ 13.9. Khung như trên hình 13.13a làm từ các dầm chữ I có các đặc trưng hình học như sau: a=1,34x10$^{-4}l^2$, a_r=$a_{cánh}$=0,65x10$^{-4}l^2$, I=5,30x10$^{-8}l^4$ và G=0,4E.

Xác định sự đóng góp của uốn, lực dọc trục và biến dạng trượt vào chuyển vị tại ba tọa độ như trên hình 13.13b.



Hình 13.13

Bước thứ nhất ta thay tải trọng thực bằng các lực tương đương tại các nút A, B, C và D. Bằng cách đặt hạn chế tai các nút (hình 13.13c) ta xác định các lực đầu phần tử theo phụ lục 2 và đặt vào các nút như các lực tương đương (hình 13.13d). Sau đó ta tiến hành tím chuyển vị do các lực tương đương này.

a) Biến dạng uốn. ta xác định mô men tại đầu phần tử do lực ảo đơn vị tác động tại từng tọa độ riêng biệt gây ra và do tải trọng nút tương đương trên hình 13.13d. Các mô men đầu phần tử này tập hợp trong ma trận [A_u] và [A]

$$[A_u]_{6\times3} = \begin{bmatrix} l & -0{,}5l & -1 \\ -l & -0{,}5l & 1 \\ l & 0{,}5l & -1 \\ 0 & -0{,}5l & 1 \\ 0 & 0.5l & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [A]_{6\times1} = Pl\begin{bmatrix} -1{,}875 \\ 1{,}375 \\ -0{,}375 \\ -0{,}25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chú ý các mô men đầu phần tử được liệt kê theo đúng thứ tự và cùng quy ước dấu ở cả hai ma trận trên. Lần lượt ta liên kê mô men bên trái đến mô men bên phải của từng phần tử. Mô men dương là mô men theo chiều kim đồng hồ.

Ma trận đồ mềm của từng phần tử có dạng

$$[f_M]_{6\times6} = \frac{l}{6EI}\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 01 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Thế vào phương trình 13.78 ta tìm được phần đóng góp của biến dạng uốn vào chuyển vị tại các tọa độ

$$[D]_{3\times1} = \frac{Pl^3}{6EI}\begin{Bmatrix} -10{,}375 \\ 0{,}125 \\ 10{,}50/l \end{Bmatrix} = \frac{P}{El}\begin{Bmatrix} -0{,}3263 \\ 0{,}0039 \\ 0{,}3301/l \end{Bmatrix}$$

b) Biến dạng do lực dọc trục. Lực dọc trục của phần tử do tải tác động tập hợp trong ma trận [A_u] và [A] dưới đây, quy ước lực kéo là lực dương

$$[A_u]_{6\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [A]_{3\times1} = P\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ma trận đồ mềm của từng phần tử có dạng

$$[f_M]_{3\times3} = \frac{l}{Ea}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Thế vào phương trình 13.65 ta tìm được phần đóng góp của biến dạng dọc trục vào chuyển vị tại các tọa độ

$$[D]_{3\times1} = \frac{Pl}{Ea}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{P}{El}\begin{Bmatrix} -0{,}0075 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) Biến dạng trượt. Lực cắt của phần tử do tải tác động tập hợp trong ma trận [A_u] và [A] dưới đây

$$[A_u]_{6\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [A]_{3\times1} = P\begin{Bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ma trận đồ mềm của từng phần tử có dạng

$$[f_M]_{3\times3} = \frac{l}{Ea}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Thế vào phương trình 13.79 ta tìm được phần đóng góp của biến dạng trượt vào chuyển vị tại các tọa độ

$$[D]_{3\times1} = \frac{Pl}{Ga_r}\begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{P}{El}\begin{Bmatrix} -0{,}0192 \\ 0{,}0192 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ta thấy rõ ràng phần đóng góp của biến dạng uốn lơn hơn hẳn so với biến dạng do lực dọc trục và lực cắt. Chính vì vậy người ta thường bỏ qua biến dạng dọc trục và biến dạng trượt.

13.6 Ma trận độ mềm của kết cấu tổng thể

Ma trận độ mềm có thể thiết lập cho từng phần tử của kết cấu sử dụng phương trình (13.64). Các phần tử của ma trận độ mềm là chuyển vị tại tọa độ do lực đơn vị tác động riêng biệt tại từng tọa độ. Do vậy tải trọng thực và tải trọng ảo sẽ như nhau ta ký hiệu là [A]=[A_u] và phương trình (13.64) trở thành

$$[f] = \sum_{s=1}^{4}[A_u]_s^T[f_M]_s[A_u]_s \tag{13.67}$$

ở đây [f] là ma trận độ cứng của kết cấu tổng thể, [f_M] là ma trận độ cứng của kết cấu chưa ghép nối (xem công thức 13.61) và chỉ số s ký hiệu 4 nguyên nhân gây ra biến dạng gồm: uốn, dọc trục, trượt(cắt) và xoắn.nếu ta chỉ xét biến dạng do uốn thì (13.67) thành

$$[f] = [A_u]^T_{2m\times n}[f_M]_{2m\times 2m}[A_u]_{2m\times n} \tag{13.68}$$

Các ký hiệu được dùng là

f – phần tử của ma trận độ cứng của kết cấu tổng thể

{A_u} – ma trận con kích cỡ 2x1, số hạng của nó là hai mô men tại đầu phần tử do lực ảo đơn vị đặt tại một tọa độ gây ra.

$[f_M]_i$= ma trận độ mềm uốn của phần tử thứ i (phương trình 12.75) $= \dfrac{l}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

m - số phần tử; n - số tọa độ

Phương trình (13.67) còn có thể viết dưới dạng

$$[f] = \sum_{i}^{m}\sum_{s=1}^{4}[A_u]^T_{is}[f_M]_{is}[A_u]_{is} \tag{13.69}$$

ở đây $\{A_u\}_{is}$ và $[f_M]_{is}$ – là các ma trận của phần tử thứ *i*

Khi đó phương trình (13.68) cho trường hợp chỉ kể đến biến dạng do uốn có dạng

$$[f] = \sum_{i}^{m}[A_u]^T_{i\ 2\times n}[f_M]_{i\,2\times 2}[A_u]_{i\,2\times n} \tag{13.70}$$

13.7 Ma trận độ cứng của kết cấu tổng thể

13.7.1. Chuyển hệ tọa độ của chuyển vị và lực

Xuất phát từ nguyên lý công ngoại lực bằng công nội lực, trường hợp kết cấu làm từ vật liệu đàn hồi tuyến tính tuân thủ định luật Hooke ta có được định lý Betti

Định lý Betti phát biểu, Khi kết cấu làm từ vật liệu đàn hồi tuyến tính tuân thủ định luật Hooke ta có quan hệ

$$\sum_{i=1}^{n}F_iD_{iQ} = \sum_{i=n+1}^{m}Q_iD_{iF} \tag{13.71}$$

Có nghĩa tổng các tích của hệ lực F và chuyển vị tại các tọa độ tương ứng do hệ lực Q gây ra bằng tổng các tích của hệ lực Q và chuyển vị tại các tọa độ tương ứng do hệ lực F gây ra.

Ta dùng định lý Betti để chuyển hệ lực bất kỳ tác động lên kết cấu về lực tương được tại tọa độ (độc lập và là các bậc tự do của hệ).

Xét ví dụ khung trên Hình 13.13a. Khi không kể đến lực dọc trục hệ có 3 bậc tự do (Hình 13.13b). Nếu ta biết ma trận độ mềm [f] của hệ thì chuyển vị độc lập {D} do lực ngoài {F} gây ra có thể xác định bằng phương trình {D}=[f]{F}, lực và chuyển vị đều cho tại ba tọa độ trên.

Nếu hệ chịu tác động của hệ lực bất kỳ, bước đầu tiên ta phải đưa lực về lực tương đương tại nút. Các lực đầu phần tử biểu diễn trên Hình 13.13d được công lại cho ta lực tương đương {F^*} như trên Hình 13.13e. Các lực {F^*} tác động tại các tọa độ này {D^*}, các tọa độ này không độc lập và liên hệ với {D} bằng

$$\{D^*\} = [C]\{D\} \tag{13.72}$$

ma trận [C] xác định từ hình học của khung. Phân tử của ma trận C là giá trị của chuyển vị D^* ứng với dịch chuyển đơn vị tại một trong các tọa độ D.

$$\{D^*\}_{6\div 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.75 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{D\}_{3\times 1} \tag{13.73}$$

Sử dụng định lý Betti cho hai hệ lực ta được

$$\sum_{i=1}^{3} F_i D_i = \sum_{j=1}^{6} F_j^* D_j^*$$

Thế D^* vào phương trình trên và đưa về dạng ma trận ta có

$$\{D\}^T \{F\} = \{D\}^T [C]^T \{F^*\} \tag{13.74}$$

từ đây ta có

$$\{F\} = [C]^T \{F^*\} \tag{13.75}$$

13.7.2. Chuyển hệ tọa độ của ma trận đồ mềm và ma trận độ cứng

Xét hệ tọa độ trên kết cấu tuyến tính. Xác định vị trí và hướng của lực ngoài F và chuyển vị D, xác định ma trận [S] và [f]. Trong hệ tọa độ khác ta có các đại lượng tương ứng F^*, D^*, [S^*] và [f^*]. Nếu lực và chuyển vị liện hệ qua

$$\{D\} = [H]\{D^*\} \text{ hoặc } \{F^*\} = [H]^T \{F\} \tag{13.76}$$

ta có công thức chuyển đổi ma trận độ cứng như sau

$$[S^*] = [H]^T [S][H] \tag{13.77}$$

Khi lực tại hai hệ tọa độ có liên hệ

$\{F\}=[L]\{F^*\}$ hoặc $\{D^*\}=[L]^T\{D\}$ (13.78)

ta có công thức chuyển đổi ma trận độ mềm như sau

$[f^*]=[L]^T[f][L]$ (13.79)

Các ma trận chuyển đổi [H] và [L] được thiết lập từ quan hệ hình học giữa D và D^*. Hai hệ lực F và F^* tương đương theo nghĩa hệ {F} và {F^*} gây ra chuyển vị {D} và {D} như nhau. Hệ lực {F} và {F^*) thực hiện cùng một công trên các chuyển vị {D} và {D^*}.

12.7.3. Ma trận độ cứng của kết cấu tổng thể

Ma trận độ cứng của kết cấu có thể thiết lập bằng cách ghép nối các ma trận độ cứng của các phân tử tạo thành.

Xét kết cấu trên Hình 13.13a trong hệ tọa độ 13.13b. Công ngoại lực bằng năng lượng biến dạng của kết cấu vì

$$W=U=\frac{1}{2}\{D\}^T[S]\{D\} \tag{13.80}$$

ở đây [S] là ma trận độ cứng ứng với tọa độ trên Hình 13.13b.

Năng lượng biến dạng cũng có thể nhận được bằng tổng năng lượng biến dạng của từng phân tử riêng biệt. Tổng này bằng với công của lực đầu phần tử thực hiện trên chuyển vị {D^*} tại tọa độ trên Hình 13.13c.

$$U=\frac{1}{2}\{D^*\}^T[S_M]\{D^*\} \tag{13.81}$$

ở đây [S_M] là ma trận độ cứng của kết cấu chưa lắp ghép

$$[S_M]=\begin{bmatrix} [S_M]_1 & & & \\ & [S_M]_2 & & \\ & & \Lambda & \\ & & & [S_M]_m \end{bmatrix} \tag{13.82}$$

$[S_M]_i$ là ma trận độ cứng của phần tử thứ i ứng với tọa độ {D^*} tại đầu phần tử, m là số hiệu của phần tử.

Chuyển vị {D^*} và {D} liên hệ theo hình học bằng $\{D^*\}=[C]\{D\}$, thế vào phương trình (13.82) ta nhận được

$$U = \frac{1}{2}\{D\}^T[C]^T[S_M][C]\{D^*\} \tag{13.83}$$

So sánh (12.94) với (12.95) ta thấy

$$[S]_{n\times n} = [C]^T_{p\times n}[S_M]_{p\times p}[C]_{p\times n} \tag{13.84}$$

n số chuyển vị {D} và p số chuyển vị {D*}. Để thuận tiện ta chuyển (12.98) về dạng

$$[S] = \sum_i^m [C]_i^T [S_M]_i [C]_i \tag{13.85}$$

Kết luận chương 13

Khái niệm công ảo rất quan trọng trong cơ học kết cấu, rất tiện lợi khi biểu diễn công ảo của ứng suất bất kỳ dưới dạng thích hợp khi đưa bài toàn về dạng ma trận. Khi đó ta có thể cùng một lực xem xét các thành phần của thế năng biến dạng do lực dọc trục, mô men uốn, lực cắt và xoắn gây nên.

Khái niệm năng lượng bù và công bù không có ý nghĩa vật lý nhưng giá trị số của nó dễ dàng biểu diễn các phương trình năng lượng.

Nguyên lý công khả dĩ liên hệ giữa hệ lực cân bằng với hệ chuyển vị tương thích của kết cấu bất kỳ (tuyến tính hay phi tuyến). Ta dùng lực ảo hay chuyển vị ảo và sử dụng đẳng thức giữa công bù của ngoại lực ảo với năng lượng bù của nội lực ảo thực hiện trên chuyển vị thực. Tương tự ta có thể dùng đẳng thức giữa công ảo của ngoại lực và nội lực thực hiện trên chuyển vị ảo. Các định lý lực đơn vị và chuyển vị đơn vị là những công thức tiện dụng. Chú ý định lý thứ hai chỉ áp dụng cho kết cấu tuyến tính

Phương pháp công ảo là phương pháp tổng quát. Có thể sử dụng cho kết cấu phẳng và không gian, siêu tĩnh và tĩnh định. Tuy nhiên, đầu tiên ta phải xác định ứng lực cho mọi trường hợp kết cấu. Cơ sở của phương pháp công ảo là quan hệ giữa hệ lực cân bằng với hệ chuyển vị tương thích.

Tính toán chuyển vị bằng phương pháp công ảo gồm xác định nội lực do tải trọng thực và tải trọng ảo đơn vị tác dụng tại từng điểm (tọa độ) nơi ta cần tìm chuyển vị. Nếu cần tính một vài chuyển vị thì công việc tính toán trở nên khá nặng nề, do vậy cần hệ thống qui trình tính toán lại dưới dạng ma trận và lập chương trình tính toán.

Khi ta áp dụng phương pháp công ảo, nói chung bốn loại ứng lực là lực dọc trục, mô men uốn, lực cắt và mô men xoắn đều tham gia đóng góp vào chuyển vị . Đối với hệ dàn chỉ có lực dọc trục gây ra chuyển vị. Biểu thức của năng lượng là tích phân của tích hai hàm.

Khi áp dụng phương pháp công ảo vào hệ khung với tải trọng đặt vào một điểm bất kỳ của phần tử, nên ta quy về các tải nút tương đương (theo nghĩa chuyển vị do chúng gây ra tại các điểm cần tính như tải thực).

Quy trình tính chuyển vị cho hệ khung bằng phương pháp công ảo rất rõ ràng. Trong hệ khung biến dạng do uốn là phần đóng góp chính trong chuyển vị, do vậy các biến dạng do các lực khác gây ra thường được bỏ qua. Tuy nhiên ta cùng nên kiểm tra xem chúng có thực sự nhỏ hay không. Như trong trương hợp này, các công thức được viết dưới dạng ma trận tiện dụng khi sử dụng chương trình tính để tính chuyển vị tại một số điểm và cho nhiều trường hợp tải.

Các ví dụ trong chương này chỉ trình bày cho các phần tử thẳng với tiết diện không đổi. Tuy nhiên, phương pháp công ảo có thể áp dụng cho kết cấu với các phần tử cong và có tiết diện thay đổi. Một trong những cách gần đứng là ta chia kết cấu thực thành một loạt phần tử thẳng với tiết diện không đổi.

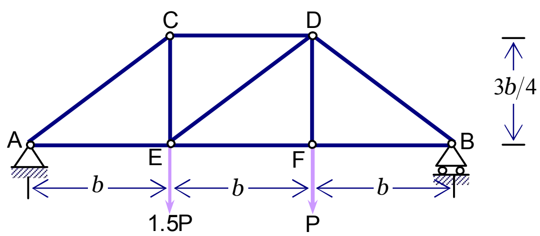
Cuối cùng cần nhấn mạnh lại là phương pháp công ảo cho phép xem xét cả bốn loại nội lực trong khi các phương pháp khác chỉ xem xét một trong số bốn loại.

Bài tập chương 13

Bài 13.1. Cho dàn phẳng trên hình vẽ tìm

a) Chuyển vi thẳng đứng tại E chịu tải như đã vẽ trên hình;
b) Chuyển vị tại E khi dàn không chịu và phần tử CD co lại một đoạn Δ=b/2000;

Các phần tử có cùng độ cứng chống kéo Ea=const.

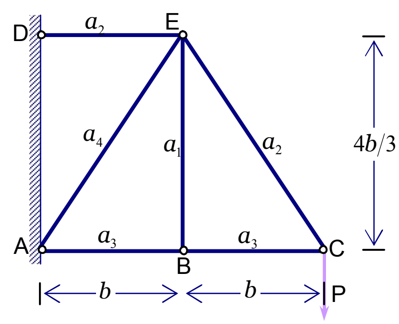


Bài 13.1.

Bài 13.2. Cho dàn phẳng như trên hình vẽ tìm

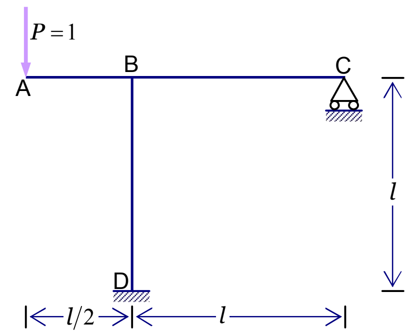
a) Chuyển vị tại C chịu tải trọng P như đã vẽ trên hình;
b) Chuyển vị thẳng đứng tại C khi dàn không chịu và hai phần tử DE và EC đều co lại một đoạn Δ=0.3cm;

Các phần tử có tiết diện như trên hình vẽ. Giả thiết modun đàn hồi E=2.1x10^{11} N/m^2.



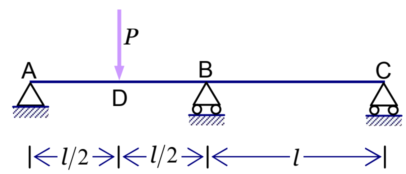
Bài 13.2

Bài 13.3. Tìm chuyển vị thẳng đứng tại điểm A của khung trên hình vẽ, chỉ xét biến dạng uốn. Độ cứng EI không đổi trên toàn bộ khung.



Bài 13.3

Bài 13.4. Tìm chuyển vị thẳng đứng tại điểm D và góc xoay tại điểm A của dầm trên hình vẽ, chỉ xét biến dạng uốn. Độ cứng EI không đổi trên toàn bộ khung.



Bài 13.4

CHƯƠNG 14

Phương pháp phần tử hữu hạn – Sơ lược

14.1 Giới thiệu

Kết cấu là một hệ cơ học có vô số bậc tự do và theo lý thuyết cơ học môi trường liên tục, chuyển động của nó được biểu biểu diễn qua trường chuyển vị $u(x_1, x_2, x_3, t)$; $v(x_1, x_2, x_3, t)$; $w(x_1, x_2, x_3, t)$ thoả mãn các điều kiện trên biên. Để tìm trường chuyển vị này đòi hỏi phải giải hệ phương trình đạo hàm riêng rất phức tạp, ngay cả trong trường hợp biên đơn giản. Có rất ít trường hợp mà ta có thể nhận được lời giải giải tích của các phương trình chuyển động ở dạng phương trình đạo hàm riêng. Đối với kết cấu dạng khung, dàn, việc thiết lập phương trình chuyển động cho trường chuyển vị nói trên là không thực tế. Với các kết cấu phức tạp, người ta phải có cách tiếp cận riêng, chủ yếu là tìm cách rời rạc hoá chúng và đưa chúng về những hệ đơn giản hơn, có hữu hạn bậc tự do. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một phương pháp cổ điển, đơn giản nhưng vẫn còn đang được sử dụng hiện nay để giải các phương trình đạo hàm riêng.

Rời rạc hoá bằng phương pháp Rayleigh-Ritz

Một trong những phương pháp rời rạc hoá được áp dụng rộng rãi là phương pháp Rayleigh-Ritz. Phương pháp này sử dụng nguyên lý biến phân của chuyển dịch để đưa bài toán có vô số bậc tự do về bài toán với *n* hữu hạn bậc tự do mô tả bằng hệ phương trình vi phân thường tương tự như hệ rời rạc. Việc rời rạc hoá bắt đầu từ việc chọn cách xấp xỉ gần đúng hàm chuyển vị, để có thể viết $\boldsymbol{D}_i$ dưới dạng

$$\{D(x_1, x_2, x_3, t)\} = [L(x_1, x_2, x_3)]\{\mathrm{q}(t)\}, \tag{14.1}$$

trong đó $\{\mathrm{q}(t)\} = \{q_1 \ldots q_n\}^T$ - vec tơ các tọa độ suy rộng, [L] là ma trận nội suy chuyển vị kích cỡ (3 × *n*)

$$L_j(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} f_{1j}(x_1,x_2,x_3) & \Lambda & f_{1n}(x_1,x_2,x_3) \\ f_{2j}(x_1,x_2,x_3) & \Lambda & f_{2n}(x_1,x_2,x_3) \\ f_{3j}(x_1,x_2,x_3) & \Lambda & f_{3n}(x_1,x_2,x_3) \end{bmatrix}$$

Áp dụng phép biến phân ảo cho các tọa độ suy rộng **q**, ta có phương trình chuyển động dưới dạng rời rạc hoá

$$[\mathrm{S}]\{\mathrm{q}\} + [\mathrm{M}]\{\ddot{\mathrm{q}}\} = \{\mathrm{p}(t)\}, \tag{14.2}$$

trong đó

$[\mathrm{M}] = \int_{\mathrm{V}} \rho [\mathrm{L}]^T [\mathrm{L}] d\mathrm{V}$ - ma trận khối lượng đối xứng và xác định dương

$[S] = \int_{\mathrm{V}} [B]^{\mathrm{T}} [d][B] d\mathrm{V}$ - ma trận độ cứng đối xứng và xác định dương

$\{\mathrm{p}\} = \int_{S_\sigma} [L]^T \{\bar{\mathrm{t}}\} dA + \int_{\mathrm{V}} [L]^{\mathrm{T}} \{\overline{\mathrm{X}}\} d\mathrm{V}$ - vec tơ ngoại lực

$[\bar{L}]$ - ma trận nội suy biến dạng, tính được từ ma trận nội suy chuyển vị qua phép vi phân $[\mathrm{B}] = [\partial][\mathrm{L}]$ với $[\partial]$ là toán tử vi phân có dạng

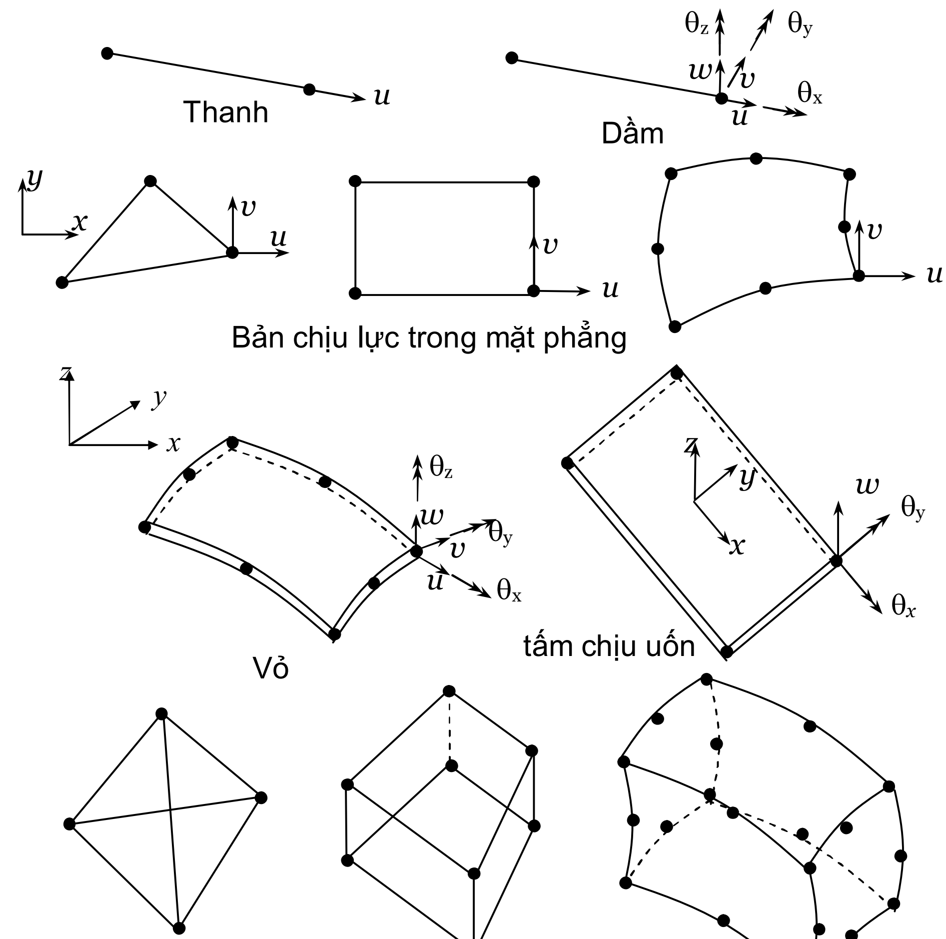
$$[\partial]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \tag{14.3}$$

[d]- ma trận quan hệ ứng suất và biến dạng Hook

Như vậy, một hệ liên tục có vô số bậc tự do đã được đưa về hệ hữu hạn bậc tự do, mô tả bằng phương trình vi phân thường (14.2), có thể giải bằng các công cụ đã biết. Tuy vậy, phương pháp này mới chỉ đưa ra ý tưởng rời rạc ở dạng toán học thuần tuý, mà không biết được sai số là bao nhiêu. Việc phát triển phương pháp này cho các bài toán của cơ học kết cấu đã dẫn đến sự ra đời của một phương pháp mới - phương pháp phần tử hữu hạn, một công cụ mà cho đến nay vẫn chưa có sự cạnh tranh nào đáng kể.

14.2 Phương pháp phần tử hữu hạn – cơ sở

Phương pháp phần tử hữu hạn được xem như sự phát triển của phương pháp Rayleigh-Ritz. Tư tưởng chủ yếu của nó là việc chia vật thể biến dạng hay kết cấu thành một số hữu hạn các phần tử có hình học đơn giản (Hình 14.1) với trường chuyển vị giả thiết là đã biết.



Hình 14.1 Ví dụ về các loại phần tử và bậc tự do tại nút.

Đưa vật thể liên tục (kết cấu) với bậc tự do là vô cùng về hệ hữu hạn bậc tự do với các ẩn số là các chuyển vị tại nút. Trong khuôn khổ của cơ học kết cấu ta có thể nói phương pháp phần tử hữu hạn là một ứng dụng của phương pháp chuyển vị. Hệ khung, dàn hay lưới ngang ta sử dụng phần tử là các thanh nối tại các nút ta có thể gọi thanh là phần tử một chiều. Phần tử hữu hạn hai chiều và ba chiều dùng cho kết cấu tường ngăn, vỏ và các kết cấu có hình khối như móng máy. Phần tử hữu hạn có thể có nhiều loại hình dạng với các nút ở góc hay ở cạnh . Các chuyển vị ẩn có thể là dịch chuyển thẳng hay các góc xoay.

Chuyển vị trong phần tử được biểu diễn qua các chuyển vị nút. Sử dụng trường chuyển vị giả định nào đó (ví dụ là hàm đa thức của các tọa độ x và y). Biến dạng xác định bằng phép vi phân các chuyển vị và sau đó ứng suất xác định từ biến dạng bằng định luật Hooke. Chính việc sử dụng trường chuyển vị giả định là sự phát triển của phương pháp Rayleigh-Ritz.

Phương pháp phần tử hữu hạn được phát triển do sự phát triển của máy tính. Việc tính toán tiến hành cho các ma trận tổng hợp của tất cả các loại phần tử ta sử dụng khi mô hình hóa. Các ma trận tổng thể này được ghép nối từ các ma trận của từng phần tử. Ma trận phần tử gồm có:

- Ma trận độ cứng liên hệ giưa chuyển vị nút với nội lực tại nút
- Ma trận ứng suất liên hệ giưa ứng suât (nội lực) với chuyển vị tạo nút
- Vec tơ lực đầu phần tử khi tải trọng tác động không vào nút hay khi có dãn nở nhiệt.

14.3 Áp dụng năm bước tính toán của phương pháp chuyển vị

Ta xét hệ khung phẳng như các ví dụ trong chương 12. Nếu ta bỏ qua biến dạng dọc trục chỉ xét đến uốn trong mặt phẳng và giả thiết trục x trùng với trục thanh, khi đó mỗi phần tử có hai nút với hai bậc tự do tại mỗi nút. Các bậc tự do này là độ võng v theo phương y và góc quay $\theta_y = \dfrac{\partial v}{\partial x}$. Mục đích xác định nội lực tại mặt cắt hai đầu thanh $\{Q_1, M_1, Q_2, M_2\}$. Ngoại lực tại các nút gồm có vec tơ lực tại nút $\{F_y, M_z\}_i$ và lực phân bố theo đơn vị dài trên thanh, có thể xem xét cả tải do thay đổi nhiệt độ. Áp dụng năm bước của phương pháp chuyển vị

Bước 1. Xác định các bậc tự do bằng các chuyển vị v và θ_y tại mỗi nút, đồng thời xác định các đáp ứng cần tính là nội lực tại hai mặt cắt hai đầu thanh $\{A\}_m = \{Q_1, M_1, Q_2, M_2\}_m$.

Bước 2. Với ngoại lực tác dụng thiết lập vec tơ tải hạn chế $\{F\}$, đồng thời xác định $\{A_r\}_m = \{Q_{r1}, M_{r1}, Q_{r2}, M_{r2}\}_m$ là nội lực khi chuyển vị bị hạn chế. Ở đây

$$\{F\} = \{F_a\} + \{F_b\} \tag{14.4}$$

trong đó $\{F_a\}$ là hợp lực của ngoại lực nhưng ngược dấu còn $\{F_b\}$ là lực phần tử quy về nút ví dụ như lực phân bố trên thanh, lực tập trung không đặt vào điểm nút của phần tử hay tải nhiệt.

Bước 3. Thiết lập ma trận độ cứng [S] bằng cách ghép nối tất cả các ma trận độ cứng phần tử. Đồng thời thiết lập ma trận $[A_u]_m = \{Q_{u1}, M_{u1}, Q_{u2}, M_{u2}\}_m$ là nội lực do các chuyển vị đơn vị tại từng tọa độ một.

Bước 4. Giải phương trình cân bằng

$$[S]\{D\} = \{-F\} \tag{14.5}$$

để tìm vec tơ {D} có kích cỡ là 2xm.

Bước 5. Tìm các đáp ứng từ

$$\{A\}_m = \{A_r\}_m + [A_u]_{m\times m}\{D\}_m \tag{14.6}$$

14.4 Phương trình đàn hồi cơ sở

Theo định luật Hooke ta có quan hệ ứng suất và biến dạng

$$\{\sigma\} = [d]\{\varepsilon\} \tag{14.7}$$

trong đó $\{\sigma\}$ và $\{\varepsilon\}$ là các vec tơ ứng suất và biến dạng suy rộng tương ứng, và ma trận $[d]$ là ma trận vuông đối xứng gọi là ma trận hệ số đàn hồi.

Các thành phần biến dạng xác định từ chuyển vị bằng phương trình suy rộng sau đây

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{f\} \tag{14.8}$$

trong đó $[\partial]$ là ma trận các toán tử vi phân và vec tơ $\{f\}$ là vec tơ các hàm mô tả trường chuyển vị.

Ví dụ

– Trạng thái ứng suất đơn ta có

$\{\sigma\} \equiv \sigma$, $\{\varepsilon\} \equiv \varepsilon$, $[d] \equiv E$, $\{f\} \equiv u$, $[\partial] \equiv d/dx$

– Kéo, nén thanh thẳng ta có

$\{\sigma\} \equiv N$, $\{\varepsilon\} \equiv \varepsilon$, $[d] \equiv EA$, $\{f\} \equiv u$, $[\partial] \equiv d/dx$

– Thanh chịu uốn thuần túy ta có

$\{\sigma\} \equiv M$, $\{\varepsilon\} \equiv \varepsilon$, $[d] \equiv EI$, $\{f\} \equiv v$, $[\partial] \equiv d^2/dx^2$

14.5 Nội suy chuyển vị

Để thiết lập ma trận phần tử, ta cần các hàm nội suy để xác định dạng biến dạng của phần tử. Chuyển vị của một điểm bất kì trong phần tử liên hệ với chuyển vị nút bằng công thức

$$\{f\} = [L]\{D^*\} \tag{14.9}$$

trong đó

$\{f\}$ vec tơ các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kì

$[L]$ ma trận các hàm của tọa độ xác định vị trí của điểm trong phần tử

Hàm nội suy của trường chuyển vị $[L]$ còn được gọi là hàm dạng được chọn để thoả mãn các yêu cầu:

1. Nội suy biểu diễn bằng các hàm liên tục từng đoạn. Để đơn giản, trường chuyển vị trong mỗi phần tử biểu diễn bằng tổ hợp một số các hàm đã chọn sao cho thể hiện được ứng xử của phần tử kết cấu trong kết cấu tổng thể. Nói chung hàm nội suy có dạng đa thức.

2. Các hàm này được chọn sao cho các tọa độ suy rộng của phương pháp Rayleigh là các giá trị địa phương của trường chuyển vị trong kết cấu (Hình 14.1), hay nói một cách ngắn gọn, toạ độ suy rộng là chuyển vị tại các nút của phần tử.

Nếu cả hai điều kiện này được thoả mãn chặt chẽ thì gần đúng nhận được sẽ là khả dĩ động học theo quan điểm của phương pháp Rayleigh-Ritz. Ngoài ra, trường chuyển vị là khả vi trên toàn bộ miền của từng phần tử, và các tọa độ suy rộng có cùng giá trị tại nơi giao nhau của các phần tử đảm bảo tính liên tục của trường ứng suất ở mức độ tổng thể.

Ví dụ

Trường hợp kéo, nén đúng tâm ta có $\{f\} \equiv u$, $\{D^*\} = \{u_1, u_2\}$ là dịch chuyển thẳng tại hai đầu nút. Ma trận hàm nội suy $[L]$ gồm hai hàm nội suy

$$[L] = [1-\xi, \xi]$$

trong đó $\xi = x/l$ và l là độ dài thanh

Trường hợp thanh chịu uốn ta có $\{f\} \equiv u$ và vec tơ chuyển vị nút

$$\{D^*\} = \left\{ v_1, \left(\frac{dv}{dx}\right), u_2, \left(\frac{dv}{dx}\right)_2 \right\}$$

Ma trận hàm nội suy $[L]$ gồm bốn hàm nội suy

$$[L] = \left[1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, l\xi[\xi-1]^2, \xi^2(3-\xi), l\xi^2(\xi-1)\right]$$

trong đó $\xi = x/l$ và l là độ dài thanh

14.6 Ma trận độ cứng và ma trận ứng suất phần tử

Ta có vec tơ chuyển vị tại một điểm bất kì trong phần tử biểu diễn qua chuyển vị nút như (14.9)

$$\{f\} = [L]\{D^*\}$$

Bằng phép vi phân gần đúng ta có biểu thức của biến dạng

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{f\} = [\partial][L][D^*]$$

$$\{\varepsilon\} = [B][D^*] \tag{14.10}$$

trong đó

$$[B] = [\partial][L] \tag{14.11}$$

Khi đó định luật Hooke có dạng

$$\{\sigma\} = [d]\{\varepsilon\} = [d][B][D^*]$$

$$\{\sigma\} = [\sigma_u][D^*] \tag{14.12}$$

trong đó $[\sigma_u]$ là ma trận ứng suất của phần tử

$$[\sigma_u] = [d][B] \tag{14.13}$$

Các phần tử của cột thứ j nào đó trong ma trận $[\sigma_u]$ là các thành phần ứng suất tại điểm nào đó khi cho chuyển vị $D_j^* = 1$.

Phần tử S_{ij}^* của ma trận độ cứng là lực tại tọa độ i ứng với chuyển vị đơn vị tại j. S_{ij}^* có thể xác định theo định lí chuyển vị đơn vị trong chương 13:

$$S_{ij}^* = \int_V \{\sigma_{uj}\}^T \{\varepsilon_{ui}\} dV \tag{14.14}$$

ở đây $\{\sigma_{uj}\}$ là ứng suật thực tại điểm nào đó do dịch chuyển đơn vị tại j, $\{\varepsilon_{ui}\}$ là biến dạng ảo tại chính điểm đó ứng với dịch chuyển ảo đơn vị tại nút i. Khi xét phần tử hai chiều ta lấy tích phân trên toàn bộ diện tích. Khi xét bài toán thanh ta lấy tích phân trên toàn bộ chiều dài. Như vậy ứng suất và biến dạng trong tích phần này là các ứng suất và biến dạng mở rộng.

Biểu diễn qua hàm dạng ta có phần tử của ma trận độ cứng

$$S_{ij}^{*}=\int_{V}\{B\}_{j}^{T}[d]\{B\}_{i}\,dV \tag{14.15}$$

trong đó $\{B\}_j$ và $\{B\}_i$ là cột thứ i và thứ j của ma trận

$$\left[S^{*}\right]=\int_{V}[B]^{T}[d][B]dV \tag{14.16}$$

14.7 Véc tơ lực phần tử

Xét cân bằng tại nút j của kết cấu

$$F_{bj}=-\int_{V}\{B\}_{j}^{T}\{p\}dV \tag{14.17}$$

trong đó $\{p\}$ biểu diễn cường độ ngoại lực phân bố trên phần tử

Vec tơ phần tử có dạng

$$\{F_b\}=-\int_{V}[L]^{T}\{p\}dV \tag{14.18}$$

Véc tơ này là vec tơ lực phân bố tương ứng vì nó sử dụng hàm dạng [L] như khi thiết lập ma trận độ cứng.

Trường hợp biến dạng do sự thay đổi nhiệt ta có

$$\{\sigma_r\}=-[d]\{\varepsilon_0\} \tag{14.19}$$

trong đó

$$\varepsilon_0=\alpha T\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix} \tag{14.20}$$

Khi đó lực phần tử do dãn nở nhiệt

$$\{F_b^{*}\}=-\int_{V}[B]^{T}[d][\varepsilon_0]dV \tag{14.21}$$

14.8 Phần tử dầm không gian

Hiện nay, trong tính toán kết cấu hệ khung, giàn không gian, phương pháp phần tử hữu hạn chiếm vị trí hàng đầu, trong đó phần tử dầm ba chiều đóng vai trò chủ đạo. Chính vì vậy, chúng ta sẽ mô tả phương pháp phần tử hữu hạn một cách cô đọng trên phần tử dầm.

Phần tử dầm không gian trong phương pháp phần tử hữu hạn được xây dựng dựa trên cơ sở chọn các hàm xấp xỉ là các đa thức Hermit. Những đa thức này thực chất là các hàm ảnh hưởng tĩnh học đối với các chuyển vị dọc trục, xoắn và uốn. Chúng có thể nhận được như lời giải của bài toán biến dạng tĩnh dựa trên các giả thiết sau:

- Các đầu phần tử ngàm chặt với các nút trên lưới phần tử hữu hạn.
- Các đặc trưng cơ lý của phần tử không thay đổi dọc theo chiều dài của nó.

Trong trường hợp chung cho phần tử dầm không gian, chuyển vị tại các nút bao gồm:

$$\{D\}_e^T = \{D_1^e, ..., D_{12}^e\} = \{u_1, v_1, w_1, \theta_1, w_1', v_1', u_2, v_2, w_2, \theta_2, w_2', v_2'\}, \tag{14.22}$$

trong đó u, v, w là các chuyển dịch thẳng, θ là góc xoắn, w', v' là các góc xoay quang trục y và trục z tương ứng. Trường chuyển vị $\{D\}_i^T = \{u(x), \theta(x), v(x), w(x)\}$ biểu diễn qua các chuyển vị nút $\{D\}_o^T$ nhờ các hàm nội suy (hàm dạng)

$$\{D\}_i^T = [\mathrm{L}(x)]\{\mathrm{D}\}_e, \tag{14.23}$$

trong đó $[L(x)]$ là ma trận nội suy chuyển vị

$$[L(x)] = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 & \rho_6 & 0 & \rho_8 & 0 & 0 & 0 & \rho_{12} \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 & \rho_5 & 0 & 0 & 0 & \rho_9 & 0 & \rho_{11} & 0 \end{bmatrix} \tag{14.24}$$

và hàm $\rho_j(x)$, j = 1,...,12 được gọi là hàm dạng, chúng là các đa thức

$$\rho_j(x) = \sum_i C_{ij} x^i \ . \tag{14.25}$$

Ma trận độ cứng nhận được từ tích phân (14.16)

$$S_e = \int_0^L [B^T(x)][d][B(x)]dx \ , \ ,$$

trong đó

$$[B(x)] = \begin{bmatrix} \rho_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_7' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{10}' & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2'' & 0 & 0 & 0 & \rho_6'' & 0 & \rho_8'' & 0 & 0 & 0 & \rho_{12}'' \\ 0 & 0 & \rho_3'' & 0 & \rho_5'' & 0 & 0 & 0 & \rho_9'' & 0 & \rho_{11}'' & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \rho_j' = \dfrac{\partial \rho_j}{\partial x}; \\ \rho_j'' = \dfrac{\partial^2 \rho_j}{\partial x^2} \end{matrix}, \tag{14.26}$$

và

$$[d] = \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GJ_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EJ_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EJ_y \end{pmatrix}. \tag{14.27}$$

trong đó

A - diện tích mặt cắt,

E - modun đàn hồi,

G - môdun trượt và

J_x - moment quán tính độc cực,

J_y, J_z - các moment quán tính chống uốn trong các mặt phẳng xz và xy tương ứng.

Để nhận được các số hạng của ma trận độ cứng S ta tính tích $[B]^T(x)[d][B]$ rồi lắp vào tích phân trong (14.7) ta nhận được các số hạng $S_{ij} \neq 0$ có dạng

$$S_{ii} = \int_0^L EA\rho_i'^2 dx \quad i = 1,7 \ , \quad S_{ii} = \int_0^L GJ\rho_i'^2 dx \quad i = 4,10 \ ,$$

$$S_{71} = \int_0^L EA\rho_7'\rho_1' dx, \quad S_{10,4} = \int_0^L GJ\rho_{10}'\rho_4' dx;$$

$$S_{ii} = \int_0^L EJ_{qt}\rho_i''^2 dx \quad J_{qt} = J_z \; khi \; i = 2,6,8,12; \; J_{qt} = J_y \; khi \; i = 3,5,9,11,$$

$$S_{53} = \int_0^L EJ_y\rho_5''\rho_3'' dx, \quad S_{93} = \int_0^L EJ_y\rho_9''\rho_3'' dx, \quad S_{11,3} = \int_0^L EJ_y\rho_{11}''\rho_3'' dx,$$

$$S_{9,5} = \int_0^L EJ_y\rho_9''\rho_5'' dx, \quad S_{11,5} = \int_0^L EJ_y\rho_{11}''\rho_5'' dx, \quad S_{11,9} = \int_0^L EJ_y\rho_{11}''\rho_9'' dx,$$

$$S_{62} = \int_0^L EJ_z\rho_6''\rho_2'' dx, \quad S_{82} = \int_0^L EJ_z\rho_8''\rho_2'' dx, \quad S_{12,2} = \int_0^L EJ_z\rho_{12}''\rho_2'' dx$$

$$S_{86} = \int_0^L EJ_z\rho_8''\rho_6'' dx, \quad S_{12,6} = \int_0^L EJ_z\rho_{12}''\rho_6'' dx, \quad S_{12,8} = \int_0^L EJ_z\rho_{12}''\rho_8'' dx,$$

$$S_{ij} = S_{ji}, \tag{14.28}$$

Các ma trận S và M có dạng

$$S_e = \begin{bmatrix}
S_{11} & & & & & & & & & & & \\
0 & S_{22} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & S_{33} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & S_{44} & & & & & & & & \\
0 & 0 & S_{53} & 0 & S_{55} & & & & S & Y & M & \\
0 & S_{62} & 0 & 0 & 0 & S_{66} & & & & & & \\
S_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{77} & & & & & \\
0 & S_{82} & 0 & 0 & 0 & S_{86} & 0 & S_{88} & & & & \\
0 & 0 & S_{93} & 0 & S_{95} & 0 & 0 & 0 & S_{99} & & & \\
0 & 0 & 0 & S_{10,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{10,10} & & \\
0 & 0 & S_{11,3} & 0 & S_{11,5} & 0 & 0 & 0 & S_{11,9} & 0 & S_{11,11} & \\
0 & S_{12,2} & 0 & 0 & 0 & S_{12,6} & 0 & S_{12,8} & 0 & 0 & 0 & S_{12,12}
\end{bmatrix}, \tag{14.29}$$

Đây là các ma trận độ cứng của từng phần tử trong hệ tọa độ địa phương, bước tiếp theo phải đưa các ma trận đó về hệ tọa độ tổng thể rồi ghép chúng với nhau để có được ma trận độ cứng của toàn hệ. Như vậy cốt lõi của việc xây dựng ma trận độ cứng là lựa chọn ma trận hàm dạng $[L(x)]$.

Trường hợp phần tử dầm không gian hàm dạng là các hàm Hermit:

$$\rho_1(x) = \rho_4(x) = \rho_1^o(x) \equiv 1 - \frac{x}{L};\ \ \rho_7(x) = \rho_{10}(x) = \rho_2^o(x) \equiv \frac{x}{L};$$

$$\rho_2(x) = -\rho_3(x) = \rho_3^o(x) \equiv 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3};$$

$$\rho_5(x) = \rho_6(x) = \rho_4^o(x) \equiv x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2;$$

$$\rho_8(x) = -\rho_9(x) = \rho_5^o(x) \equiv 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3};$$

$$\rho_{11}(x) = \rho_{12}(x) = \rho_6^o(x) \equiv \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right); \qquad (14.30)$$

các hàm $\rho_i(x)$ là các hàm biểu diễn đường chuyển dịch của dầm với hai đầu ngàm cứng. Chúng thực chất là nghiệm của các bài toán biên sau đây:

1. $u''(x) = 0$; $u(0) = u_1$; $u(L) = u_2$

2. $\theta''(x) = 0$; $\theta(x) = \theta_1$; $\theta(L) = \theta_2$

3. $\dfrac{d^4 v(x)}{dx^4} = 0$; $v(0) = v_1$; $v'(0) = v_1'$; $v(L) = v_2$ $v'(L) = v_2'$

4. $\dfrac{d^4 w(x)}{dx^4} = 0$; $w(0) = -w_1$; $w'(0) = w_1'$; $w(L) = -w_2$; $w'(L) = -w_2'$ (14.31)

Nếu đem biểu diễn các hàm dạng dưới dạng hàm bậc ba như sau

$$\rho_j(x) = C_{0j} + C_{1j}x + C_{2j}x^2 + C_{3j}x^3 \quad j = 1,2,...12 \qquad (14.32)$$

thì các hệ số C_{ij}, i = *0, 1, 2, 3,* j = *1, 2, ...12* cho trong bảng 14.1.

Lấy đạo hàm của các hàm dạng $\rho_j(x)$ để thiết lập các ma trận *H* ta có

$$\rho_1'(x) = \rho_4'(x) = -\rho_7'(x) = -\rho_{10}'(x) = \rho_1'^o(x) \equiv -\frac{1}{L};$$

$$\rho_2''(x) = -\rho_3''(x) = -\rho_8''(x) = \rho_9''(x) = \rho_3''^{o}(x) \equiv \frac{6}{L^2}\left(\frac{2x}{L} - 1\right);$$

$$\rho_5''(x) = \rho_6''(x) = \rho_4''^{o}(x) \equiv \frac{2}{L}\left(\frac{3x}{L} - 2\right);$$

$$\rho_{11}(x) = \rho_{12}''(x) = \rho_6''^{o}(x) \equiv \frac{2}{L}\left(\frac{3x}{L} - 1\right).$$

Bảng 14.1. Hệ số C_{ij} đối với phần tử dầm không gian

j	C_{0j}	C_{1j}	C_{2j}	C_{3j}
1	1	$-\frac{1}{L}$	0	0
2	1	0	$-\frac{3}{L^2}$	$\frac{2}{L^3}$
3	-1	0	$\frac{3}{L^2}$	$-\frac{2}{L^3}$
4	1	$-\frac{1}{L}$	0	0
5	0	1	$-\frac{2}{L}$	$\frac{1}{L^2}$
6	0	1	$-\frac{2}{L}$	$\frac{1}{L^2}$
7	0	$\frac{1}{L}$	0	0
8	0	0	$\frac{3}{L^2}$	$-\frac{2}{L^3}$
9	0	0	$-\frac{3}{L^2}$	$\frac{2}{L^3}$
10	0	$\frac{1}{L}$	0	0
11	0	0	$-\frac{1}{L}$	$\frac{1}{L^2}$
12	0	0	$-\frac{1}{L}$	$\frac{1}{L^2}$

Đặt các biểu thức này vào để tính các tích phân (14.9) ta thiết lập được ma trận độ cứng của phần tử dầm cổ điển có dạng ở dưới đây.

$$
\mathrm{K}_e = \begin{bmatrix}
\frac{EF}{L} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} & & & & & & & & \\
0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L} & & & & & & \\
-\frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EF}{L} & & & & & \\
0 & -\frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & & & & \\
0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} & & \\
0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & \\
0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{L} & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L}
\end{bmatrix}
$$

Dựa trên quy trình này ta có thể chọn hàm dạng cũng sẽ là các hàm đa thức bậc,nhưng các hệ số C_{ij} sẽ là hàm của các tham số thiết kế tương ứng tuỳ thuộc vào các giả thiết đưa ra để mô tả các khuyết tật trong kết cấu. Đưa ra các mô hình cụ thể mô tả khuyết tật và tiến hành tìm hàm dạng tương ứng ta có thể xây dựng được các phần tử dầm cải biên mô ta hư hỏng trong kết cấu.

Kết luận chương 14

Chương 14 giới thiệu phương pháp phần tử hữu hạn như một ứng dụng của phương pháp chuyển vị. Sử dụng các hàm dạng như trong phương pháp Rayleigh-Ritz ta đưa bài toán vô số bậc tự do về bài toán hữu hạn bậc tự do và thiết lập được các ma trận phần tử.

Phương pháp phần tử hữu hạn thông dụng để mô hình hoá kết cấu công trình trong cơ học kết cấu được tiến hành theo các bước như sau:

1. Chia kết cấu thành các phần tử bằng một lưới gồm các nút đóng vai trò liên kết giữa các phần tử với nhau trong một không gian tổng thể chọn sẵn. Mỗi phần tử được xác định bằng các nút cố định trong một hệ toạ độ địa phương gắn với phần tử đó.
2. Định nghĩa các chuyển vị nút trong hệ toạ độ địa phương cũng như trong hệ toạ độ tổng thể và các liên kết biên giàn buộc lên các chuyển vị nút này.
3. Biểu diễn trường chuyển vị của phần tử như một vật rắn biến dạng thông qua các chuyển vị nút trong hệ toạ độ địa phương và sử dụng biểu diễn này cùng với các nguyên lý, phương trình của cơ học xây dựng các ma trận độ cứng, khối lượng và vec tơ tải trọng nút cho từng phần tử.
4. Ghép nối, liên kết các ma trận, vec tơ chuyển vị, lực nút,... của phần tử thành các ma trận và vec tơ tương ứng của cả kết cấu.

Áp dụng các điều kiện biên vào các đặc trưng vừa xây dựng được ta sẽ được các ma trận [M], [C], [S], các vec tơ {D}, {P} và hệ phương trình

$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [S]\{D\} = \{P\},$$

trong đó

{D} = {D(t)} - vec tơ chuyển vị nút,

{P(t)} - vec tơ lực ngoài đã đưa về nút,

[M] - ma trận khối lượng,

[C] - ma trận hệ số cản,

[S] - ma trận độ cứng.

Quy trình này được áp dụng phổ biến trong các phần mềm phân tích kết cấu hiện có như

- SAP2000

- ANSYS
- Abaqus
- SAMCEF
- NASTRAN v.v.

PHỤ LỤC

PHỤ LỤC 1.

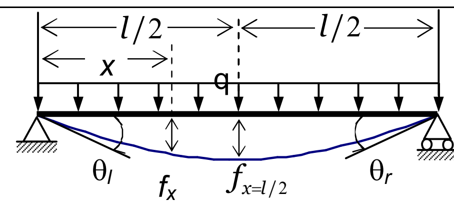
Dịch chuyển của các phần tử thanh thẳng

Thanh có độ cứng uốn là EI và độ cứng xoắn là GJ. Chiều dương của dịch chuyển hướng xuống, chiều dương của góc xoay theo chiều kim đồng hồ. Bỏ qua biến dạng trượt

---

$$f_x = \frac{qx}{24EI}\left(l^3 - 2lx^2 + x^3\right);$$

$$f_{x=\frac{l}{2}} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI};\ \theta_l = -\theta_r = \frac{ql^3}{24EI}$$

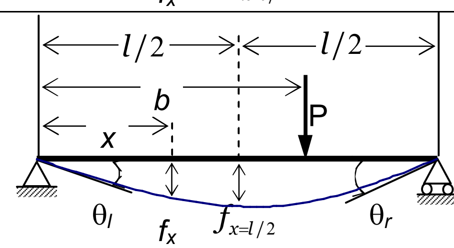


$$f_x = \begin{cases} \dfrac{P(l-b)x}{6lEI}\left(2lb - b^2 - x^2\right) & x \le b \\ \dfrac{Pb(l-x)}{6lEI}\left(2lx - x^2 - b^2\right) & x \ge b \end{cases}$$

$$\theta_l = \frac{Pb(l-b)}{6lEI}(2l-b);\ \theta_r = \frac{Pb}{6lEI}\left(l^2 - b^2\right);$$

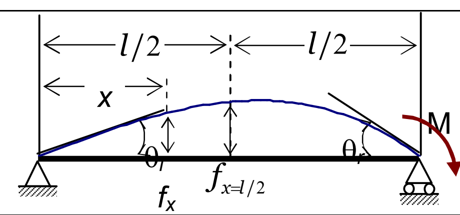
$$b = \frac{l}{2} \Rightarrow \theta_l = -\theta_r = \frac{Pl^2}{16EI};$$

$$f_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pl^3}{48EI}$$



$$f_x = \frac{Mx}{6EI}\left(\frac{x^2}{l} - l\right);\ f_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{Ml^2}{16EI};$$

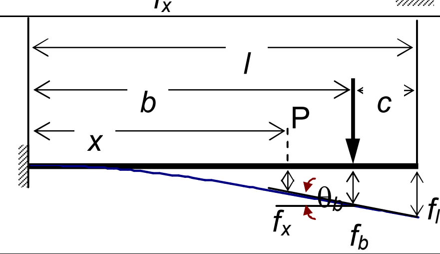
$$\theta_l = -\frac{Ml}{6EI};\ \theta_r = \frac{Ml}{3EI}$$



$$f_x = \frac{Pbx^2}{6EI}\left(3 - \frac{x}{b}\right) \quad 0 \le x \le b;$$

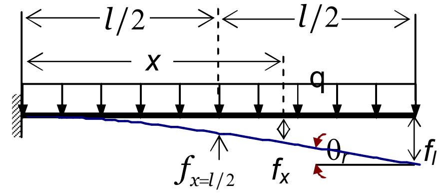
$$f_b = \frac{Pb^3}{2EI};\theta_b = \frac{Pb^2}{2EI};$$

$$f_x = f_b + \theta_b(l-x) \quad b \le x \le l;\ f_l = f_b + \theta_b c$$



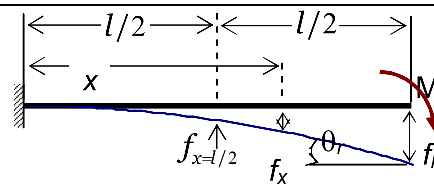
$$f_x = \frac{ql^4}{24EI}\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)^4 - 1 + 4\frac{x}{l}\right]$$

$$f_l = \frac{ql^4}{8EI};\; f_{l/2} = \frac{17ql^4}{384EI};\; \theta_r = \frac{ql^3}{6EI};$$



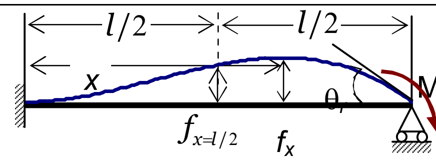
$$f_x = \frac{Mx^2}{2EI};\; f_l = \frac{Ml^2}{2EI};$$

$$f_{l/2} = \frac{Ml^2}{8EI};\; \theta_r = \frac{Ml}{EI};$$



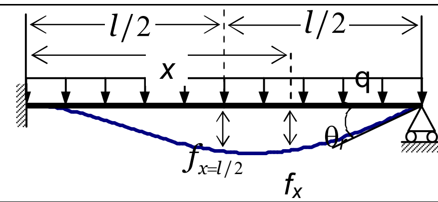
$$f_x = \frac{Mx^2}{4EI}\left(\frac{x}{l}-1\right);\; f_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{Ml^2}{32EI};$$

$$\theta_r = \frac{Ml}{4EI}$$



$$f_x = \frac{ql^2x^2}{48EI}\left(3-5\frac{x}{l}+2\frac{x^2}{l^2}\right);$$

$$f_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{ql^4}{192EI};\; \theta_r = -\frac{ql^3}{48EI}$$



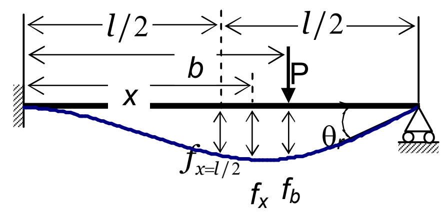
$$f_x = \frac{Pbx^2}{6EI}\left[\left(3-\frac{x}{b}\right) - \frac{b}{2l}\left(3-\frac{b}{l}\right)\left(3-\frac{x}{l}\right)\right]$$

$0 \le x \le b$

$$f_b = \frac{Pb^3}{6EI}\left(2-\frac{3b}{2l}+\frac{b^2}{2l^2}\right);\; \theta_r = \frac{-Pb^2}{4EI}\left(1-\frac{b}{l}\right);$$

$$f_x = \frac{Pb^2}{6EI}\left[3x - b - \frac{x^2}{2l}\left(3-\frac{b}{l}\right)\left(3-\frac{x}{l}\right)\right]$$

$b \le x \le l$



$$f_\psi = \frac{ql^4\beta^2\psi}{24EI}\left(2-\beta^2-2\psi^2\right) \quad \psi \le (1-\beta);$$

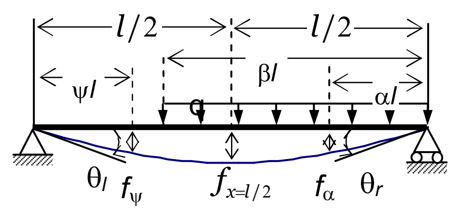
$$f_\alpha = -\frac{ql^4\alpha}{24EI}\left[2\beta(2-\beta)\alpha^2 - \alpha^3 + \beta^2(\beta-2)^2\right];$$

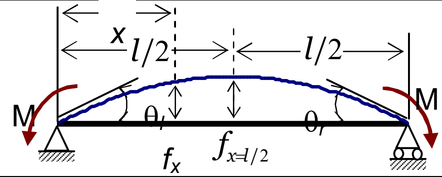
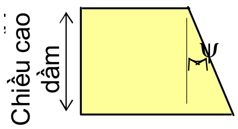
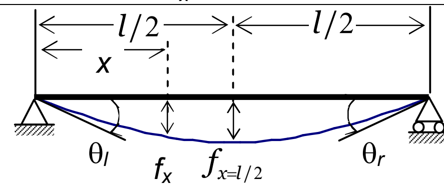
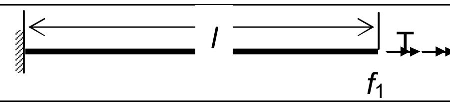
$\alpha \le \beta$

$$f_\beta = \frac{ql^4\beta^3}{24EI}(1-\beta)(4-3\beta);$$

$$f_{\beta/2} = \frac{ql^4\beta^3}{384EI}\left(32-39\beta+12\beta^2\right);$$

$$\theta_r = \frac{-ql^3\beta^2}{24EI}(\beta-2)^2;\; \theta_l = \frac{ql^3\beta^2}{24EI}\left(2-\beta^2\right);$$



$f_x = -\dfrac{Mx(l-x)}{2EI}$; $f_{x=\frac{l}{2}} = -\dfrac{Ml^2}{8EI}$; $\theta_l = -\theta_r = -\dfrac{Ml}{2EI}$;	
$f_x = \dfrac{\psi x(l-x)}{2}$; $f_{x=\frac{l}{2}} = \dfrac{\psi l^2}{8}$; $\theta_l = -\theta_r = \dfrac{\psi l}{2}$; ψ - độ dãn nở nhiệt theo chiều cao dầm	
$f_1 = \dfrac{Tl}{GJ}$	

PHỤ LỤC 2.
Lực đầu phần tử của các phần tử thanh thẳng

Trong bảng cho lực đầu phần tử của dầm có độ cứng uốn và độ cứng xoắn không đổi. Quy ước dầu lực dương hương lên trên, moment dương theo chiều kim đồng hồ. Khi sử dụng trong phương pháp chuyển vị ta sẽ lấy dầu theo hệ tọa độ đã chọn.

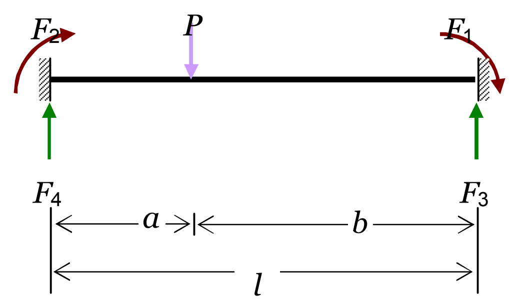
$$F_1 = \frac{Pa^2b}{l^2};\; F_2 = \frac{Pab^2}{l^2};$$

$$F_3 = \frac{P}{2}\left[\frac{a}{l} + \frac{ab}{l^3}(a-b)\right];$$

$$F_4 = \frac{P}{2}\left[\frac{b}{l} + \frac{ab}{l^3}(b-a)\right];$$

Khi $a = b = \frac{l}{2}$; thì

$$F_1 = -F_2 = \frac{Pl}{8};\; F_3 = F_4 = \frac{P}{2};$$



$$F_1 = \frac{qc}{12l^2}\left[12a^2b + c^2(l-3a)\right];$$

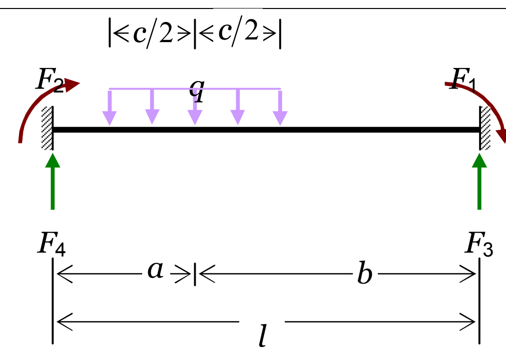
$$F_2 = -\frac{qc}{12l^2}\left[12ab^2 + c^2(l-3b)\right];$$

$$F_3 = \frac{qca}{l} + \frac{F_1 + F_2}{l};$$

$$F_4 = \frac{qcb}{l} - \frac{F_1 + F_2}{l};$$

Khi $a = b = \frac{l}{2}$; $c = l$ thì

$$F_1 = -F_2 = \frac{ql^2}{12};\; F_3 = F_4 = \frac{ql}{2};$$



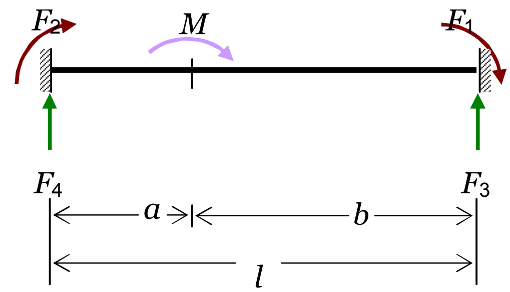
$F_1 = \dfrac{Ma}{l}\left(2 - \dfrac{3a}{l}\right);$

$F_2 = \dfrac{Mb}{l}\left(2 - \dfrac{3b}{l}\right);$

$F_3 = -F_4 = \dfrac{6Mab}{l^3};$

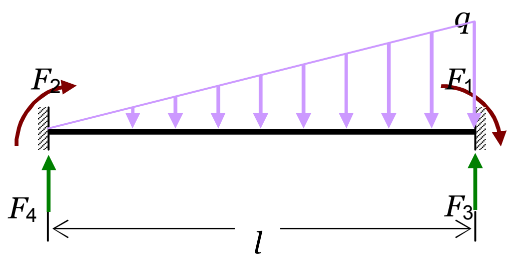
Khi $a = b = \dfrac{l}{2};$ thì

$F_1 = F_2 = \dfrac{M}{4};\ F_3 = -F_4 = \dfrac{3M}{2l};$

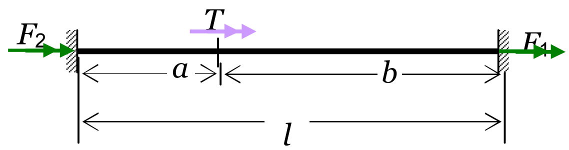


$F_1 = \dfrac{ql^2}{20};\ F_2 = -\dfrac{ql^2}{30};$

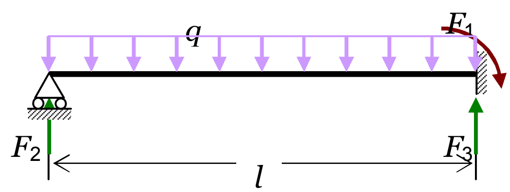
$F_3 = \dfrac{7ql}{20};\ F_4 = \dfrac{3ql}{20};$



$F_1 = -\dfrac{Ta}{l};\ F_2 = -\dfrac{Tb}{l};$



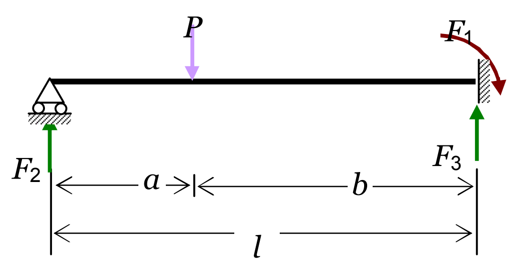
$F_1 = \dfrac{ql^2}{8};\ F_2 = \dfrac{3ql}{8};\ F_3 = \dfrac{5ql}{8};$



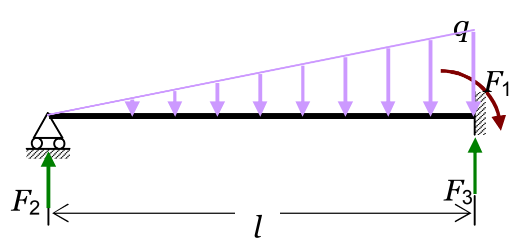
$F_1 = \dfrac{Pab}{l^2}\left(a + \dfrac{b}{2}\right);$

$F_2 = P\left[\dfrac{b}{l} - \dfrac{ab}{l^3}\left(a + \dfrac{b}{2}\right)\right];$

$F_3 = P\left[\dfrac{a}{l} + \dfrac{ab}{l^3}\left(a + \dfrac{b}{2}\right)\right];$



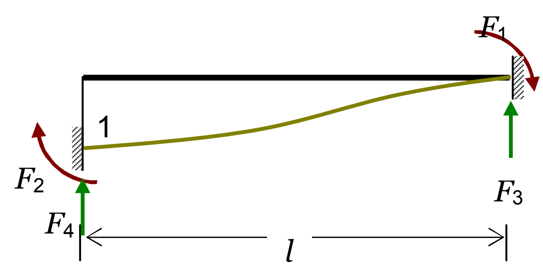
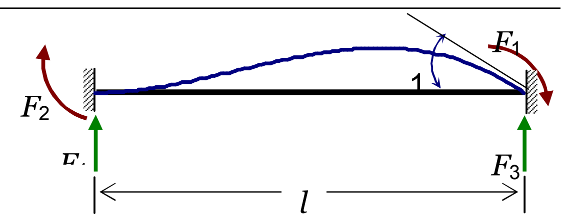
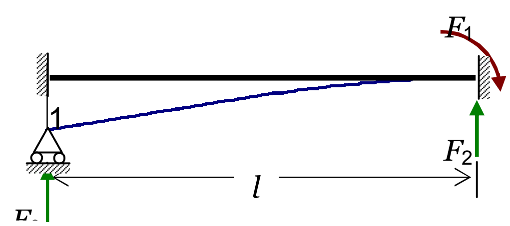
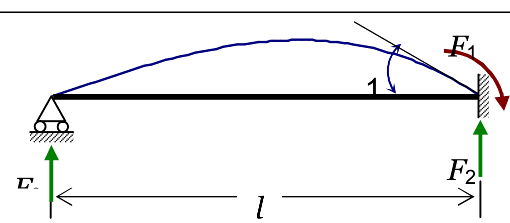
$F_1 = \dfrac{ql^2}{15};\ F_2 = \dfrac{ql}{10};\ F_3 = \dfrac{2ql}{5};$

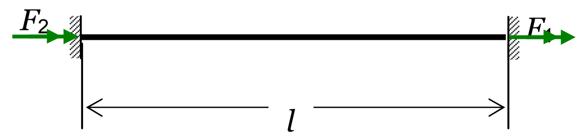
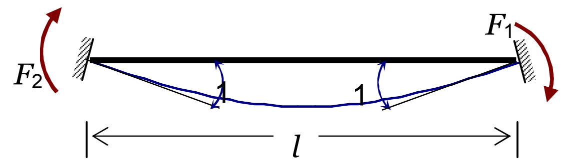


PHỤ LỤC 3.

Lực đầu phân tử do chuyển vị tai đầu nút của thanh thẳng

Trogn bảng cho lực đầu phần tử tai đầu dầm khi cho trước chuyển vị là đơn vị. Quy ước dầu lực dương hương lên, momnet dương quay theo chiều kim đồng hồ. Hiệu ứng của lực cắt bỏ qua. Bỏ qua uốn do lực dọc trục. Độ cứng của dầm không đổi

$F_1 = F_2 = \frac{6EI}{l^2}$; $F_3 = -F_4 = \frac{12EI}{l^3}$;	
$F_1 = \frac{4EI}{l}$; $F_2 = \frac{2EI}{l}$; $F_3 = -F_4 = \frac{6EI}{l^2}$;	
$F_1 = \frac{3EI}{l^2}$; $F_2 = -F_3 = \frac{3EI}{l^3}$;	
$F_1 = \frac{3EI}{l}$; $F_2 = -F_3 = \frac{3EI}{l^2}$;	

Góc xoắn D=1 $F_1 = -F_2 = \dfrac{GI}{l}$; (Bỏ qua hiệu ứng vặn)	
$F_1 = -F_2 = \dfrac{2EI}{l}$;	

PHỤ LỤC 4.
Phản lực và moment uốn tại các gối đỡ của dầm liên tục do chuyển vị đơn vị tại gối đỡ gây ra

Các bảng sau đây cho phản lực và moment uốn tại các gối đỡ của dầm liên tục do chuyển vị đơn vị lún xuống tại từng gối đỡ gây ra. Tất cả các nhịp có độ dài l và có độ cứng không đổi. Số nhịp từ 2 (hoặc 1) đến 5. Các gối tại hai đầu liên kết khớp (Bảng PL4.1), hai đầu ngàm (Bảng PL4.2), và ngàm một đầu và khớp một đầu (Bảng PL4.3). Moment uốn tại đầu khớp bằng không và không được kể đến trong bảng.

Các giá trị trong từng dòng là moment uốn hay phản lực lần lượt của từng gối đỡ từ trái sang phải. Dòng đầu sau đề mục là ảnh hưởng của sự lún của gối đỡ thứ nhất kể từ bên trái, dòng thứ hai là ảnh hưởng của sự lún của gối đỡ thứ hai kể từ bên trái , v.v.

Hình PL4.1 biểu diễn ví dụ về cách sử dụng các bảng: số nhịp là 3, gối đỡ thứ hai lún xuống một đơn vị và moment uốn và phản lực tại gối đỡ sẽ lấy ở dòng thứ hai của bảng PL4.1.2.1 và PL4.1.2.2 tương ứng.

Trong các bảng này, quy ước phản lực dương khi chúng tác động hướng lên, và quy ước moment uốn dương khi chúng gây uốn ở thớ dưới của dầm. Khi phản lực dùng để thiết lập ma trận độ cứng thì lấy dấu phù hợp với hệ tọa độ đã chọn.

Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt.

Bảng PL4.1. Ảnh hưởng của chuyển vị lún đơn vị tại một gối đỡ của dầm liên tục. Hai đầu dầm là gối tựa. EI=const. Các nhịp có độ dài l bằng nhau

PL4.1.1. Dầm hai nhịp

PL4.1.1.1 Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

-1.50000
3.00000
-1.50000

PL4.1.1.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-1.50000	3.00000	-1.50000
3.00000	-6.00000	3.00000
-1.50000	3.00000	-1.50000

PL4.1.2. Dầm ba nhịp

PL4.1.2.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

-1.60000	0.40000
3.60000	-2.40000
-2.40000	3.60000
0.40000	-1.60000

PL4.1.2.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-1.60000	3.60000	-2.40000	0.40000
3.60000	-9.60000	8.40000	-2.40000
- 2.40000	8.40000	-9.60000	3.60000
0.40000	-2.40000	3.60000	-1.60000

PL4.1.3. Dầm bốn nhịp

PL4.1.3.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

-1.60714	0.42857	-0.10714
3.64286	-2.57143	0.64286
-2.57143	4.28571	-2.57143
0.64286	-2.57143	3.64286
-0.10714	0.42857	-1.60714

PL4.1.3.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-1.60714	3.64286	-2.57143	0.64286	-0.10714
3.64286	-9.85714	9.42857	-3.85714	0.64286
-2.57143	9.42857	-13.71428	9.42857	-2.57143
0.64286	-3.85714	9.42857	-9.85714	3.64286
-0.10714	0.64286	-2.57143	3.64286	-1.60714

PL4.1.4. Dầm năm nhịp

PL4.1.4.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

-1.60765	0.43062	-0.11483	0.02871
3.64593	-2.58373	0.68900	-0.17225
-2.58373	4.33493	-2.75798	0.68900
0.68900	-2.75798	4.33493	-2.58373
-0.17225	0.68900	-2.58373	3.64593
0.02871	-0.11483	0.43062	-1.60765

PL4.1.4.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-1.60765	3.64593	-2.58373	0.68900	-0.17225	0.02871
3.64593	-9.87560	9.50239	-4.13397	1.03349	-0.17225

-2.58373	9.50239	-14.00956	10.53588	-4.13397	0.68900
0.68900	-4.13397	10.53588	-14.00957	9.50239	-2.58373
-0.17225	1.03349	-4.13397	9.50239	-9.87560	3.64593
0.02871	-0.17225	0.68900	-2.58373	3.64593	-1.60765

Bảng PL4.2. Ảnh hưởng của chuyển vị lún đơn vị tại một gối đỡ của dầm liên tục. Hai đầu dầm ngàm. EI=const. Các nhịp có độ dài l bằng nhau

PL4.2.1. Dầm một nhịp

PL4.2.1.1 Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

6.00000	-6.00000
-6.00000	6.00000

PL4.2.1.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-12.00000	12.00000
12.00000	-12.00000

PL4.2.2. Dầm hai nhịp

PL4.2.2.1 Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.50000	-3.00000	1.5000
-6.00000	6.00000	-6.0000
1.50000	-3.00000	4.5000

PL4.2.2.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.50000	12.00000	-4.50000
12.00000	-23.99998	12.00000
-4.50000	12.00000	-7.50000

PL4.2.3. Dầm ba nhịp

PL4.2.3.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l2

4.40000	-2.80000	0.80000	-0.40000
-5.60000	5.20000	-3.20000	1.60000
1.60000	-3.20000	5.20000	-5.60000
-0.40000	0.80000	-2.80000	4.40000

PL4.2.3.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.20000	10.80000	-4.80000	1.20000
10.80000	-19.20000	13.20000	-4.80000
-4.80000	13.20000	-19.20000	10.80000
1.20000	-4.80000	10.80000	-7.20000

PL4.2.4. Dầm bốn nhịp

PL4.2.4.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.39286	-2.78571	0.75000	-0.21429	0.10714
-5.57143	5.14286	-3.00000	0.85714	-0.42857
1.50000	-3.00000	4.50000	-3.00000	1.50000
-0.42857	0.85714	-3.00000	5.14286	-5.57143
0.10714	-0.21429	0.75000	-2.78571	4.39286

PL4.2.4.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.17857	10.71428	-4.50000	1.28571	-0.32143
10.71428	-18.85713	12.00000	-5.14285	1.28571
-4.50000	12.00000	-14.99999	12.00000	-4.50000
1.28571	-5.14285	12.00000	-18.85713	10.71428
-0.32143	1.28571	-4.50000	10.71428	-7.17857

PL4.2.5. Dầm năm nhịp

PL4.2.5.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.39235	-2.78469	0.74641	-0.20096	0.05742	-0.02871
-5.56938	5.13875	-2.98564	0.80383	-0.22966	0.11483
1.49282	-2.98564	4.44976	-2.81339	0.80383	-0.40191
-0.40191	0.80383	-2.81339	4.44976	-2.98564	1.49282
0.11483	-0.22966	0.80383	-2.98564	5.13875	-5.56938
-0.02871	0.05742	-0.20096	0.74641	-2.78469	4.39235

PL4.2.5.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.17703	10.70813	-4.47847	1.20574	-0.34450	0.08612
10.70813	-18.83252	11.91387	-4.82296	1.37799	-0.34450
-4.47847	11.91387	-14.69856	10.88038	-4.82296	1.20574
1.20574	-4.82296	10.88038	-14.69856	11.91387	-4.47847
-0.34450	1.37799	-4.82296	11.91387	-18.83252	10.70813
0.08612	-0.34450	1.20574	-4.47847	10.70813	-7.17703

Bảng PL4.3. Ảnh hưởng của chuyển vị lún đơn vị tại một gối đỡ của dầm liên tục. Hai đầu dầm ngàm. EI=const. Các nhịp có độ dài l bằng nhau

PL4.3.1. Dầm một nhịp

PL4.3.1.1 Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

3.00000
-3.00000

PL4.3.1.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-3.00000	3.00000
3.00000	-3.00000

PL4.3.2. Dầm hai nhịp

PL4.3.2.1 Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.28571	-2.57143
-5.14286	4.28571
0.85714	-1.71428

PL4.3.2.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-6.85714	9.42857	-2.57143
9.42857	-13.71428	4.28571
-2.57143	4.28571	-1.71428

PL4.3.3. Dầm ba nhịp

PL4.3.3.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.38462	-2.76923	0.69231
-5.53846	5.07692	-2.76923
1.38461	-2.76923	3.69231
-0.23077	0.46154	-1.61538

PL4.3.3.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.15385	10.61539	-4.15384	0.69231
10.61539	-18.46153	10.61538	-2.76923
-4.15384	10.61538	-10.15384	3.69231
0.69231	-2.76923	3.69231	-1.61538

PL4.3.4. Dầm bốn nhịp

PL4.3.4.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.39175	-2.78350	0.74227	-0.18557
-5.56701	5.13402	-2.96907	0.74227
1.48454	-2.96907	4.39175	-2.59794
-0.37113	0.74227	-2.59794	3.64948
0.06186	-0.12371	0.43299	-1.60825

PL4.3.4.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.17526	10.70103	-4.45361	1.11340	-0.18557
10.70103	-18.80411	11.81443	-4.45361	0.74227
-4.45361	11.81443	-14.35051	9.58763	-2.59794
1.11340	-4.45361	9.58763	-9.89690	3.64948
-0.18557	0.74227	-2.59794	3.64948	-1.60825

PL4.3.5. Dầm năm nhịp

PL4.3.5.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

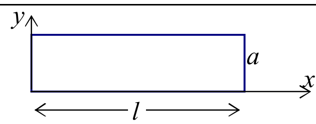
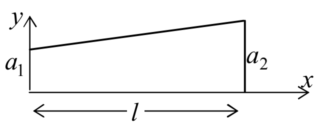
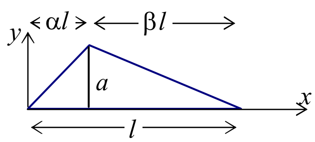
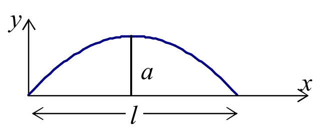
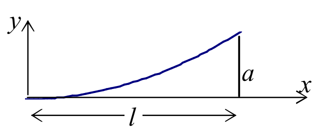
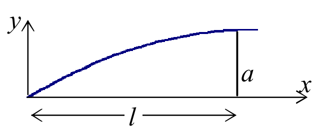
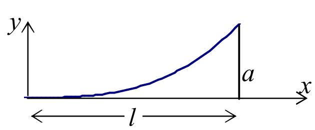
4.39227	-2.78453	0.74586	-0.19889	0.04972
-5.56906	5.13812	-2.98342	0.79558	-0.19889
1.49171	-2.98342	4.44199	-2.78453	0.69613
-0.39779	0.79558	-2.78453	4.34254	-2.58563
0.09945	-0.19889	0.69613	-2.58563	3.64641

-0.01657	0.03315	-0.11602	0.43094	-1.60773	

PL4.3.5.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

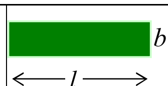
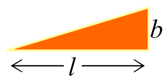
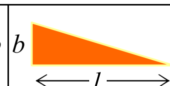
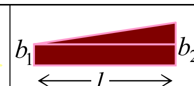
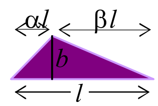
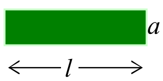
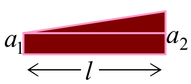
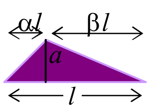
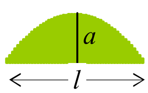
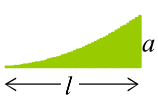
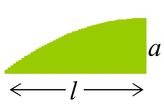
-7.17680	10.70718	-4.47513	1.19337	-0.29843	0.04972
10.70718	-18.82872	11.90055	-4.77438	1.19337	-0.19889
-4.47513	11.90055	-14.65193	10.70718	-4.17679	0.69613
1.19337	-4.77438	10.70718	-14.69856	9.51381	-2.58563
-0.29843	1.19337	-4.17679	9.51381	-9.87845	3.64641
0.04972	-0.19889	0.69613	-2.58563	3.64641	-1.60773

PHỤ LỤC 5. **Đặc trưng của các hình**

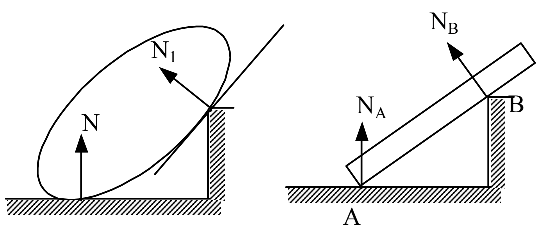
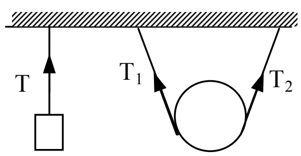
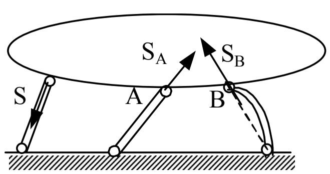
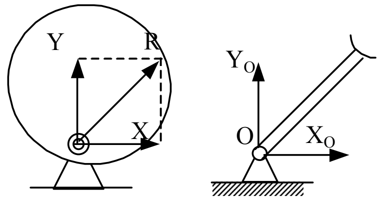
Hình	Diện tích	Tọa độ trọng tâm
	al	$\bar{x} = \frac{l}{2} \quad \bar{y} = \frac{a}{2}$
	$(a_1 + a_2)\frac{l}{2}$	$\bar{x} = \frac{l}{3}\frac{a_1 + 2a_2}{a_1 + a_2} \quad \bar{y} = \frac{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}{3(a_1 + a_2)}$
	$\frac{al}{2}$	$\bar{x} = \frac{l}{3}(\alpha + 1) \quad \bar{y} = \frac{a}{3}$
 Parabol bậc 2	$\frac{2al}{3}$	$\bar{x} = \frac{l}{2} \quad \bar{y} = \frac{2a}{5}$
 Parabol bậc 2	$\frac{al}{3}$	$\bar{x} = \frac{3l}{4} \quad \bar{y} = \frac{3a}{10}$
 Parabol bậc 2	$\frac{2al}{3}$	$\bar{x} = \frac{5l}{8} \quad \bar{y} = \frac{2a}{5}$
 Parabol bậc 3	$\frac{al}{4}$	$\bar{x} = \frac{4l}{5} \quad \bar{y} = \frac{2a}{7}$

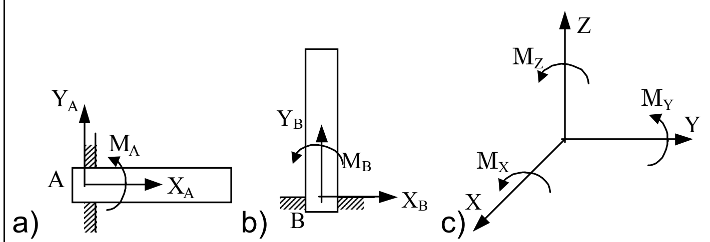
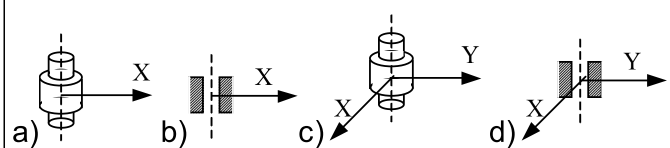
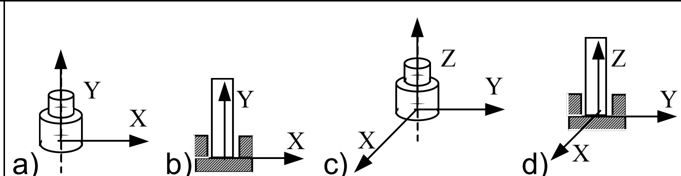
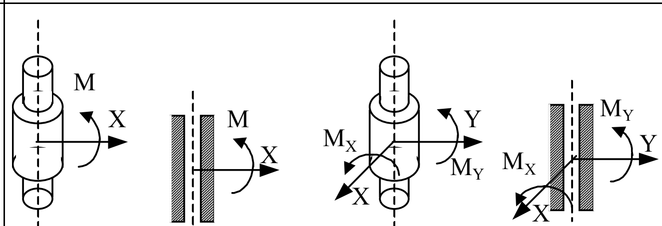
PHỤ LỤC 6. **Các giá trị của tích phân**

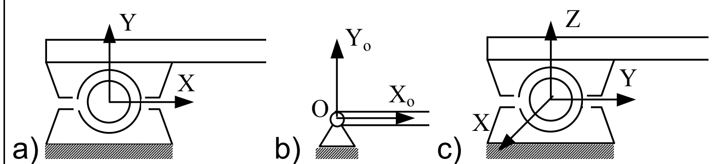
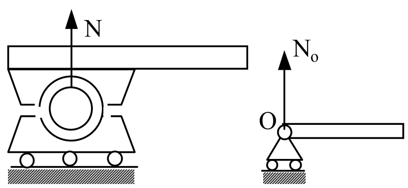
Bảng dưới đây cho các giá trị của tính phân $\int_l M_u M dl$ dùng để tính chuyển vị của kết cấu khung bằng công ảo (phương trình 4.61). Bảng này có thể dùng để tính các tích phân $\int_l N_u N dl$, $\int_l V_u V dl$, $\int_l T_u T dl$ hoặc tính phân theo đường l của hai hàm bất kỹ thay đổi theo quy luật như biểu đồ ở dòng trên cùng và dòng đầu bên trái

M_u / M					
	abl	$\frac{1}{2}abl$	$\frac{1}{2}abl$	$\frac{al}{2}(b_1+b_2)$	$\frac{1}{2}abl$
	$\frac{bl}{2}(a_1+a_2)$	$\frac{bl}{6}(a_1+2a_2)$	$\frac{bl}{6}(2a_1+a_2)$	$\frac{l}{6}(2a_1b_1+a_1b_2$ $+a_2b_1+2a_2b_2)$	$\frac{bl}{6}[(1+\beta)a_1$ $+(1+\alpha)a_2]$
	$\frac{1}{2}abl$	$\frac{abl}{6}(1+\alpha)$	$\frac{abl}{6}(1+\beta)$	$\frac{al}{6}[(1+\beta)b_1$ $+(1+\alpha)b_2]$	$\frac{1}{3}abl$
	$\frac{2}{3}abl$	$\frac{1}{3}abl$	$\frac{1}{3}abl$	$\frac{al}{3}(b_1+b_2)$	$\frac{abl}{3}(1+\alpha\beta)$
	$\frac{1}{3}abl$	$\frac{1}{4}abl$	$\frac{1}{12}abl$	$\frac{al}{12}(b_1+3b_2)$	$\frac{abl}{12}(1+\alpha+\alpha^2)$
	$\frac{2}{3}abl$	$\frac{5}{12}abl$	$\frac{1}{4}abl$	$\frac{al}{12}(3b_1+5b_2)$	$\frac{abl}{12}(5-\beta-\beta^2)$

PHỤ LỤC 7. **Đặc điểm các phản lực liên kết thường gặp**

Liên kết	Biểu diễn	Đặc điểm phản lực
Tựa (không ma sat)		Thẳng góc với mặt tựa, mặt tiếp xúc, hướng vào vật khảo sát - phản lực pháp
Dây (mềm và không co dãn)		Nằm theo dây, hướng ra ngoài vật khảo sát - sức căng
Thanh (chỉ chịu kéo hay nén)		Nằm theo thanh (đường nối 2 đầu thanh) hướng vào (ra) thanh khi thanh chịu kéo (nén) - ứng lực
Bản lề (trơn nhẵn)		Lực đặt tại bản lề chia ra hai thành phần - phản lực bản lề

Liên kết	Biểu diễn	Đặc điểm phản lực
Ngàm		Phẳng (a), (b): 2 thành phần lực X,Y và 1 ngẫu lực mô men M Không gian (c): 3 thành phần phản lực ngàm và 3 ngẫu lực mô men
ổ trụ ngắn		Cản trở di chuyển thẳng góc với trục. Phẳng (a,b): như phản lực tựa. Không gian (c,d): 2 phản lực
Cối (ổ trụ ngắn có mặt chắn		Cản trở di chuyển thẳng góc và dọc trục. Phẳng (a,b): 2 phản lực. Không gian (c,d): 3 phản lực
ổ trục dài		Cản trở di chuyển thẳng góc và quay. Phẳng (a,b): 1 phản lực và 1 ngẫu phản lực. Không gian (c,d): 2 phản lực và 2 ngẫu phản lực

Liên kết	Biểu diễn	Đặc điểm phản lực
Gối cố định		Cản trở di chuyển thẳng theo 2 phương. Phẳng (a,b): 2 phản lực Không gian(c): 3 phản lực
Gối di động (có con lăn)		Cản trở di chuyển theo phương thẳng với mặt nền. 1 phản lực.

PHỤ LỤC 8. Bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$

Độ mảnh λ	Thép CT3	Gang	Gỗ
0	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,97	0,99
20	0,96	0,91	0,97
30	0,94	0,81	0,93
40	0,92	0,69	0,87
50	0,89	0,54	0,80
60	0,86	0,44	0,71
70	0,81	0,34	0,60
80	0,75	0,26	0,48
90	0,69	0,20	0,38
100	0,60	0,16	0,31
110	0,52		0,25
120	0,45		0,22
130	0,40		0,18
140	0,36		0,16
150	0,32		0,14
160	0,29		0,12
170	0,26		0,11
180	0,23		0,10
190	0,21		0,09
200	0,19		0,08

Tài liệu tham khảo

[1]. Đỗ Sanh, Nguyễn Văn Vượng (2001) Cơ học ứng dụng. Nhà Xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

[2]. Lê Ngọc Hồng. (2006) Sức bền vật liệu. Nhà Xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[3]. Trần Văn Liên (2009) Sức bền vật liệu. Nhà Xuất bản Xây dựng, Hà Nội.

[4]. Gere J. M., Timoshenko S. P. (1984), Mechanics of Materials, Second edition, PWS-KENT Publishing Company.

[5]. Ghali A. and A. M. Neville. (1995) Structural Analysis. A Unified and Matrix Approach. Third Edition. Chapman & Hall, Melbourne.

[6]. Миролюбов И. Н., С. А. Енгалычев, Н. Д. Сергиевский, Ф. З. Алмаметов, Н. А. Курицын, К. Г. Смирнов-Васильев, Л. В. Яшина. (1974) Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. Издателство “Высшая школа”, Москова.

[7]. Феодосьев В. И. (1979), Сопротивление материалов. Издателство “Наука”, Москова.